



INTRODUÇÃO AOS FENOMÊNOS DE TRANSPORTES

TRANFERÊNCIA DE CALOR

Profº Henrique Mariano C. Amaral

2020

São Luís – Ma



Índice

INTRODUÇÃO AOS FENOMÊNOS DE TRANSPORTES	1
TRANFERÊNCIA DE CALOR	1
Índice	2
1. CONDUÇÃO DE CALOR.....	5
Lei Básica da Condução de Calor.....	5
Campo de Temperatura.....	5
Gradiente de Temperatura.....	5
Fluxo de Calor.....	6
Lei de Fourier.....	6
Condutividade Térmica.....	7
Equação Diferencial da Condução.....	8
Condições de Simplificação para Condução de Calor	14
Condições de Contorno de Primeira Espécie	15
Condições de Contorno de Segunda Espécie	16
Condições de Contorno de Terceira Espécie.....	16
Condições de Contorno de Quarta Espécie.....	17
Utilização de Parâmetros Adimensionais em Problemas de Condução de Calor	18
Condução Através de Parede Plana	20
Parede Homogênea	20
Separando as variáveis	20
Condutividade Térmica dependente da Temperatura.....	22
Parede Homogênea com Propriedades Constantes e Fluxo não Estacionário.....	23
Composição de Paredes Planas	25
Condições de Contorno De 3º Espécie Para Paredes Planas.....	28



Condução Através de Paredes Cilíndricas	31
Paredes Homogêneas	31
Parede Composta	34
Condições de Contorno de 3ª Espécie – Paredes Cilíndricas	35
Condução de Calor de uma Parede Esférica	37
Condições de Contorno de Terceira Espécie – Paredes Esféricas	39
Condução de Calor Através de Barra Fina (Aleta) de Seção Transversal Constante	40
Equação Diferencial e Sua Solução	40
Barra Infinita	41
Barra Finita	43
Transmissão de Calor Através da Parede Plana Aletada	46
Transferência de Calor Através de Aletas Circulares de Espessura Constante	49
Espessura Crítica de Isolamentos	52
Problemas Sobre Condução de Calor	54
Condução de Calor Através de Aletas Retas com Espessura Variável	56
Aleta de Perfil Retangular	59
Aleta de Perfil Triangular	61
Transferência de Calor por Convecção Forçada em Tubos	62
Transferência de Calor em Fluxo Turbulento	67
Escoamentos Bifásicos	69
Sistema Bifásico Estacionário	69
Sistema Bifásico em Escoamento	70
Alturas de Ebulição e Não-Ebulição	73
Salto de Pressão em um Canal com Escoamento Bifásico	75
Fricção no Escoamento Monofásico	75
Fricção no Escoamento Bifásico	76



ANEXO A	82
CÁLCULO ECONÔMICO DE ISOLANTE DE TUBULAÇÃO	82
TABELAS de Símbolos e Conversões (Tiradas da publicação “NIST Special Publication 330 – 2001 Edition”).....	87
Tabela 1 – Unidades Básicas SI	87
Tabela 2 – Exemplos de Unidades Derivadas SI.	88
Tabela 3. Unidades Derivadas do SI com Nomes Especiais	89
Tabela 4. Exemplos de Unidades SI derivadas e seus símbolos.	90
Tabela 5. Prefixos do SI.....	91
Tabela 6 - Valores Experimentais da Condutividade Térmica a Pressão Atmosférica	92
Tabela 7 - Propriedades da Água e do Vapor Saturado Seco como Função da Pressão de Saturação	94
Tabela 8 – Propriedades da Água e do Vapor Saturado Seco como função da Temperatura de Saturação	96
Gráfico de Moody	98
REFERÊNCIAS.....	99



1. CONDUÇÃO DE CALOR

1.1 Lei Básica da Condução de Calor

O **conceito** de condução de calor abrange o processo de propagação através de contato direto entre partículas de uma substância. Nos gases, a condução de calor ocorre pela interação molecular e atômica. Nos metais o fluxo de energia é feito principalmente pela difusão de elétrons livres; nos fluidos e sólidos dielétricos, pela colisão elástica molecular.

O processo de propagação de calor em geral, e a condução de calor em particular, é ligado intimamente com a distribuição de temperatura. Conseqüentemente, é necessária a definição de conceitos tais como “*campo de temperatura*” e “*gradiente de temperatura*”.

1.1.1 Campo de Temperatura.

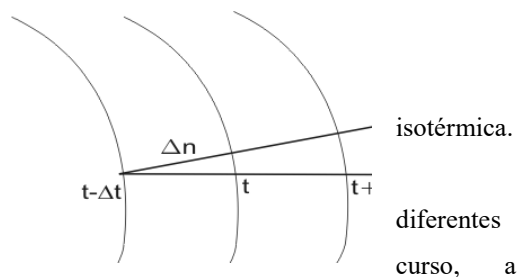
Como é geralmente conhecida, a temperatura é uma propriedade da substância, caracterizando o grau para qual ela está aquecida ou o grau de seu aquecimento. Geralmente a temperatura “ T ” é a função das coordenadas x , y e z e do tempo t , isto é:

$$T = f(x, y, z, t) \quad (1.1.1)$$

O campo de temperatura é um conjunto complexo de temperaturas de todos os pontos do espaço em um determinado momento. A equação acima é a expressão matemática para este campo. O campo de temperaturas é “*transiente*” ou “*não-estacionário*”, se a temperatura depende do tempo τ . Se a temperatura não depende do tempo (isto é, não varia com o tempo) ela é denominada “*em estado estático*” ou “*estacionário*”. O campo de temperatura pode ser função de três, duas ou uma variável, e é conseqüentemente chamado de tri-, bi- e uni-dimensional respectivamente. Um campo unidimensional é expresso por $T = f(x)$.

1.1.2 Gradiente de Temperatura.

Os locais de mesma temperatura formam uma superfície. Visto que um e o mesmo ponto no espaço não podem ter duas temperaturas diferentes, superfícies isotérmicas de temperaturas diferentes não se cruzam. Na maioria dos casos considerados por nós neste





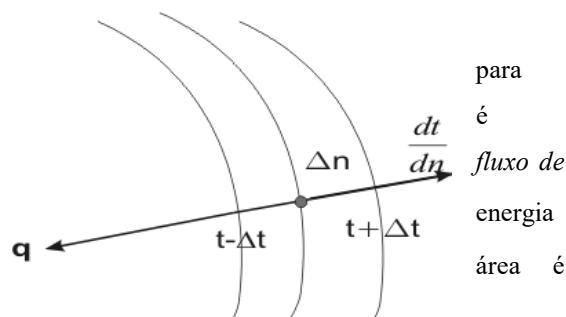
temperatura nas substâncias variam somente na direção transversal às superfícies isotérmicas. A mudança maior na temperatura ocorre na direção n normal às superfícies isotérmicas. A razão de mudanças de temperaturas ΔT em uma substância em uma distância normal Δn entre superfícies isotérmicas é uma grandeza vetorial chamada de “*gradiente de temperatura*” que é denotada por um dos seguintes símbolos:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta n} \right) = \frac{\partial T}{\partial n} = \mathbf{grad}(T) \left[\frac{K}{m} \right] = \nabla T \left[\frac{K}{m} \right] \quad (1.1.2)$$

O gradiente de temperatura é um vetor normal a uma superfície isotérmica. O vetor é positivo na direção do aumento da temperatura. O valor do gradiente de temperatura dado com sinal negativo é chamado de “*queda de temperatura*”.

1.1.3 Fluxo de Calor.

Energia térmica flui sempre da região de alta temperatura para uma de baixa temperatura. A quantidade de calor transferida chamada de “*taxa de fluxo de calor*” ou “*velocidade de calor*” (\mathbf{Q}); este valor refere-se usualmente ao fluxo de por unidade de tempo. O fluxo de calor Q por unidade de chamado de velocidade específica ou taxa específica de transferência de calor ou carregamento térmico de superfície aquecida (\mathbf{q}). No sistema técnico de unidades, a velocidade de fluxo de calor é expressa em [kcal/h] e o fluxo por unidade de área em [kcal/m².h]. No sistema SI, são representados respectivamente por W (Watt) e W/m².



O valor \mathbf{Q} (bem como \mathbf{q}) é um vetor cuja direção coincide com aquela na qual o calor se propaga e coincide com a direção oposta do vetor gradiente de temperatura.

1.1.4 Lei de Fourier.

Estudando a condução de calor em sólidos, Fourier (J. B. J. Fourier, 1822) descobriu que a quantidade de calor transferido era proporcional a queda de temperatura, tempo e área perpendicular na direção do fluxo de calor. No caso de quantidade de calor transferido por unidade por unidade de tempo, a relação estabelecida, pode ser escrita como:

$$\mathbf{q} = -k \cdot \nabla T \left[\frac{kcal}{m.h} \right] \text{ ou } \left[\frac{W}{m} \right] \quad (1.1.3)$$



Esta equação expressa matematicamente a lei básica da transferência de calor – **LEI DE FOURIER**

1.1.5 Condutividade Térmica.

O fator de proporcionalidade, k , da equação da lei de Fourier é chamado de *condutividade térmica*. A condutividade térmica é uma propriedade física da substância, para a transferência de calor:

$$k = -\frac{\mathbf{q}}{\nabla T} = \frac{dQ}{dA \cdot dt} \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \quad (1.1.4)$$

Assim o valor da *condutividade térmica*¹ definido pela Lei de Fourier² determina a quantidade de calor por uma unidade de área para uma queda de temperatura de 1°C ou 1K por unidade de comprimento. dA representa um elemento de área da superfície isotérmica e dt um elemento de tempo.

A condutividade térmica difere para cada substância e depende em cada caso, da estrutura, volume, peso, unidade, pressão e temperatura. Todos estes fatores dificultam consideravelmente a determinação correta da condutividade

¹ Observações quanto a condutividade térmica, k :

- (i) metais têm altos valores de k , pois são bons condutores de calor;
- (ii) líquidos, gases, têm baixos valores de k - são condutores pobres;
- (iii) o valor de k para ligas não pode ser obtido pela média ponderada dos k dos metais contribuintes ou parte da liga.
- (iv) em metais puros, k diminui com a temperatura. Na maioria dos problemas de engenharia, considera-se k não dependente da temperatura, o que é razoável se a faixa de temperatura não for muito grande. Quando a variação de temperatura for grande, pode-se tomar a variação média de k da seguinte forma:

$$k_m = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k dT ;$$

(v) no grafite e na madeira, a condutividade térmica é extremamente sensível com a direção; nesses casos tem-se

$$q_{x_i} = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad \text{onde } k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}; \text{ se for isotrópico o meio, então } k_{ij} = 0 \quad \therefore i \neq j \text{ e } k_{ii} = k .$$

² A condutividade térmica, k , é uma propriedade física do meio, que é definida pela Lei de Fourier, que por sua vez tem algumas limitações como: não leva em conta possíveis dependências de k da temperatura; aplicação em sólidos estacionários, caso contrário teríamos, por exemplo, $q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c v u_x$; não considera k dependente das direções (meio não isotrópico); não considera a variação de k .



térmica, que é usualmente dada em tabelas de referência. Para cálculos importantes a condutividade térmica deve ser determinada em laboratórios, testando os materiais envolvidos.

Desde que varie a temperatura da substancia no curso da propagação do calor, ela é especialmente importante para achar muito das condutividades térmicas que dependem da temperatura. Experiências nos mostram que para muitos materiais esta dependência é linear, isto é, tem a seguinte forma:

$$k = k_0(1 + \beta \cdot \Delta T) \quad (1.1.5)$$

onde k_0 = valor da condutividade térmica a 0°C ou $273,16\text{ K}$;

β = constante determinada em laboratório.

Nos cálculos práticos, a condutividade térmica é usualmente determinada pela media aritmética nas temperaturas limite de uma substancia e esta media será considerada constante. O cientista G. M. Kondratiev mostrou que nas condições de condução “*estacionária*” a condutividade térmica é correta para sólidos de qualquer forma, se considerada constante.

1.2 Equação Diferencial da Condução

A finalidade do estudo de qualquer fenômeno fisico é o estabelecimento de relações entre as quantidades ou propriedades características do fenômeno considerado.

Em processos físicos complexos é muito difícil o estabelecimento dessas relações quando as propriedades variam consideravelmente no espaço e no tempo. Nestes casos é usado então, um método da matemática física, onde se assume um intervalo de tempo restrito e apenas um elemento de volume no espaço, é considerado. Este método é possível, ignorando dentro dos limites do volume elementar e do intervalo de tempo considerado, variações em certas características e propriedades do processo e conseqüentemente simplificando a análise.

Desta forma o elemento de volume dV e o intervalo de tempo dt selecionados, são quantidades matemáticas infinitesimais, que através de um ponto de vista físico eles são suficientemente grandes para se desprezar a estrutura discreta do meio e considerá-lo contínuo.

A relação obtida dessa forma é a equação diferencial geral para o processo em questão. Pela integração dessa equação, podemos obter relações analíticas entre valores para um intervalo de integração e para qualquer intervalo de tempo considerado.

Para resolver problemas de campo de temperatura, entretanto, requeremos a equação diferencial da condução.

Para facilitar a dedução dessa equação diferencial, consideramos as seguintes simplificações:

- os sólidos são homogêneos e isotropos;



- os parâmetros físicos são constantes;
- a deformação do volume considerado, pelas variações de temperatura, é muito pequena em relação ao volume inicial;
- as fontes internas de calor (que pode ser dadas por $g_v = f(x, y, z, t)$, no caso mais geral), são uniformemente distribuídas no sólido;

A dedução da equação diferencial da condução é baseada na lei da conservação da energia, que pode ser formulada para nossas proposições, como:

“a quantidade de calor dQ cedida para um elemento de volume dV por condução, de fora e de fontes internas de calor durante um intervalo de tempo dt é igual á mudança de energia interna ou entalpia da substância contida naquele volume:

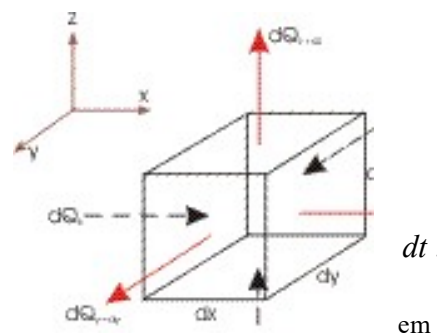
$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \quad (1.2.1)$$

onde

dQ_1 = quantidade de calor cedida por condução ao elemento de volume por intervalo de tempo dt .

dQ_2 = quantidade de calor liberado de dentro do elemento de volume dV pelas fontes internas de calor por intervalo de tempo

dQ = variação da energia interna ou entalpia da substância contida dV por tempo $d\tau$.



As quantidades de calor cedidas para os lados de volume elementar no intervalo de tempo e nas direções 0X, 0Y e 0Z, são denotados por dQ_x , dQ_y , dQ_z respectivamente.

As quantidades de calor removidas pelos lados opostos do paralelepípedo e nas mesmas direções são denotadas respectivamente por dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} , dQ_{z+dz} . A quantidade de calor cedido ao lado $dx dy$ na direção de 0X por unidade de tempo será determinada por:

$$dQ_x = q_x dy dz dt \quad (1.2.2)$$

Onde q_x é a projeção da velocidade de fluxo de calor na direção perpendicular ao lado citado. A quantidade de calor retirado do oposto, nesta mesma direção, será:



$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt \quad (1.2.3)$$

A diferença de calor cedido e retirado do paralelepípedo no tempo dt na direção do eixo OX será:

$$dQ_{1x} = dQ_x - dQ_{x+dx} \quad (1.2.4)$$

$$dQ_{x1} = q_x dydzdt - q_{x+dx} dydzdt \quad (1.2.5)$$

A função q_{x+dx} é contínua no intervalo considerado dx , portanto pode ser expandida pela serie de Taylor:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{2} + \dots \quad (1.2.6)$$

Desprezando-se os infinitesimais de ordem superior, se tem:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (1.2.7)$$

e substituindo (1.2.7) na equação (1.2.5), ter-se-á

$$dQ_{1x} = \left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dydzdt \quad (1.2.8)$$

$$dQ_{1x} = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzdt = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dV dt \quad (1.2.9)$$

De forma similar podemos obter a diferença de quantidade de calor e cedido e retirado de volume elementar dV , nas duas outras direções OY e OZ .

Assim, a quantidade de calor dQ_1 cedida para o volume considerado por condução é igual a:

$$dQ_1 = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dV dt \quad (1.2.10)$$

Desejamos agora obter o segundo termo do lado esquerdo da equação (1.2.1):

$$dQ = dQ_1 + dQ_2$$

Seja a quantidade de calor envolvida pelas fontes internas de calor e referenciada como capacidade das fontes de calor internas, denotadas por q''' ou g_v [W/m^3] ou [$kcal/m.h.^{\circ}C$]; então pela equação de Fourier:

$$dQ_2 = g_v dV dt \quad (1.2.11)$$



O terceiro termo da equação (1.2.1) é achado dependendo da natureza do processo termodinâmico no qual o sistema é realizado.

No caso de um processo isócoro (a volume constante), todo o calor transferido para um volume elementar será gasto para variar a energia interna da substância confinada nesse volume, isto é:

$$dQ = dU \quad (1.2.12)$$

Considerando a energia interna da substância confinada por unidade de volume como $u = u(t, \mathcal{V})$, achamos:

$$dU = C_v \frac{\partial T}{\partial t} dt d\mathcal{V} = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt d\mathcal{V} \quad (1.2.13)$$

onde C_v = capacidade calorífica para volume constante por unidade de volume [J/m³.K] ou [kcal/m³.°C]; c_v = capacidade para volume constante por unidade de massa [J/kg.K] ou [kcal/kg.°C], e ρ = massa específica da substância dada em [kg/m³].

Substituindo os valores obtidos em (1.2.11), (1.2.10) e (1.2.13) na equação (1.2.1), obtemos:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + g_v \quad (1.2.14)$$

ou ainda

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{q}) + g_v = -\nabla \cdot \mathbf{q} + g_v \quad (1.2.15)$$

que é a equação da energia para processos de transferência de calor a volume constante.

No processo isobárico (a pressão constante), todo o calor transferido para o volume será gasto para variar a entalpia da substância confinada nesse volume e a equação (1.2.1) será rescrita como:

$$dH = dQ_1 + dQ_2 \quad (1.2.16)$$

Considerando que a entalpia por unidade de volume é $h = h(t, p)$, se pode mostrar que:

$$dH = C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt dv = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dv = \rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dv \quad (1.2.17)$$

onde C_p = capacidade calorífica para pressão constante por unidade de volume [J/m³.K] ou [kcal/m³.°C]; c_p = capacidade calorífica a pressão constante por unidade de massa [J/kg .K] ou [kcal/kg.°C].

Assim, a equação diferencial para processos de transferência de calor a pressão constante será:



$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + g_v \quad (1.2.18)$$

ou ainda

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{q}) + g_v = -\nabla \cdot \mathbf{q} + g_v \quad (1.2.19)$$

Nos sólidos o transporte de calor obedece a *Lei de Fourier* (1.1.3) e o valor numérico da diferença entre c_p e c_v é pequeno, podemos assim consideramos $c_p = c_v$. Desta forma se tem:

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

que substituindo em (1.2.15) as expressões das projeções de vetor fluxo de calor (acima), e omitindo o subscrito da capacidade calorífica c , se obtém:

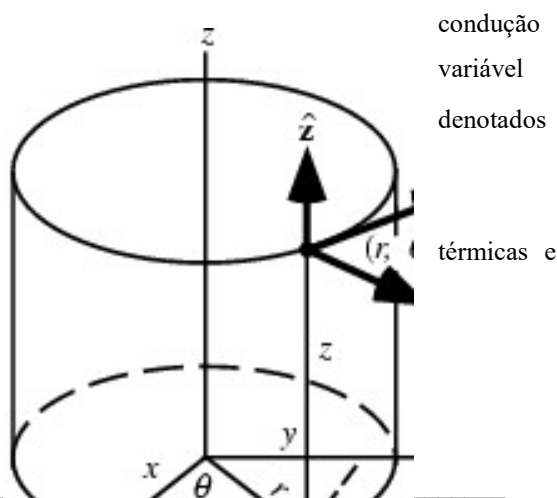
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c \cdot \rho} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{g_v}{c \cdot \rho} \quad (1.2.21)$$

ou ainda

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c \cdot \rho} \text{div}[k \cdot \text{grad}(\mathbf{T})] + \frac{g_v}{c \cdot \rho} \quad (1.2.22)$$

que é a chamada “*equação diferencial da condução*”. Ela estabelece a relação entre a variação de temperatura e espaço para qualquer ponto aquecido no qual se dá transferência ou transmissão de calor por condução.

A equação diferencial com derivadas parciais mais geral da tem a mesma forma da equação (1.2.21), mas contendo térmica e características físicas k, c, ρ que podem ser por $k = k(x, y, z, t)$, $c = c(x, y, z, t)$ e $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Assim, considerando as características físicas constantes, a equação (1.2.21) toma a forma:





$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{g_v}{c \cdot \rho} \quad (1.2.23)$$

fazendo

$$a = \frac{k}{c \cdot \rho} \text{ e } \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano, que em coordenadas cartesianas é expresso conforme a relação acima definida.

Em coordenadas cilíndricas, o Laplaciano tem a seguinte forma:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

onde r = raio vetor; θ = ângulo vetorial ou polar, e z = coordenada z .

Em coordenadas esféricas o operador Laplaciano da temperatura é dado por:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

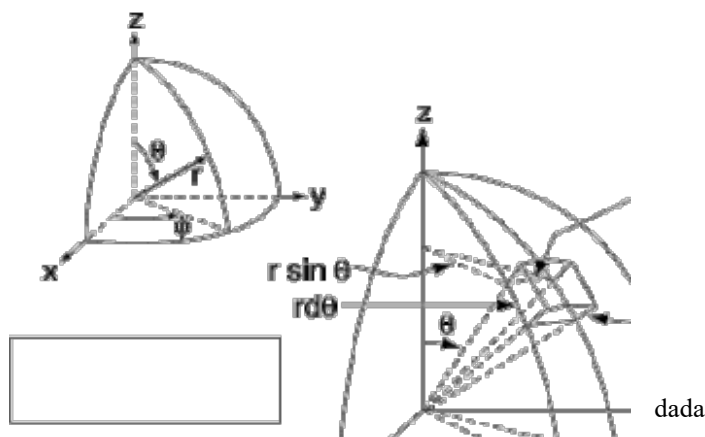
onde

r = raio vetor

$\eta = \cos \theta$

θ, φ = ângulos de distância polar e longitude polar respectivamente.

Uma outra forma de apresentação da expressão do Laplaciano da temperatura é pela seguinte fórmula:



$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \quad (1.2.24)$$

Desta forma, a equação (1.2.23) toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\nabla^2 T + \frac{g_v}{k} \right] \quad (1.2.25)$$



onde $a = \frac{k}{c \cdot \rho}$ é dado em [m²/s] e é denominado “*difusidade térmica*” e representa uma propriedade física da substância.

A transformação de coordenadas do Laplaciano

$$\nabla^2 T(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{a_1 a_2 a_3}{a_i^2} \frac{\partial T}{\partial u_i} \right)$$

pode ser efetuada fazendo as conversões segunda a tabela abaixo:

	Cartesiano (x,y,z)	Cilindricas rcosφ,rsenφ,z	Cilindricas rsenφcosψ,rsenψcosφ,rcosφ
u1	x	r	r
a ₁ ²	1	1	1
u2	y	0	φ
a ₂ ²	1	r ²	r ² sen ² ψ
u3	z	z	ψ
a ₃ ²	1	1	r ²

1.3 Condições de Simplificação para Condução de Calor

Como a *equação diferencial da condução* é baseada em leis gerais da física, ela descreve o fenômeno da condução de uma forma geral. Ela pode ser expressa, entretanto, como a descrição de todas as classes de fenômeno de condução de calor. Em geral, para escolher um processo dentre um número incontável de outros processos e dar a ele uma descrição matemática completa, é necessário suplementar a equação diferencial com descrição matemática para todas as peculiaridades particulares do processo em questão. Essas peculiaridades ou características particulares, que juntamente com a equação diferencial dão uma descrição matemática compreensiva do processo de condução investigado, são chamadas de “*condições de simplificação*”.

As condições de simplificação incluem:

- condições de características geométricas da forma e tamanho do corpo no qual é realizado o processo de condução;
- condições físicas, isto é, propriedades físicas do meio e do sólido;
- condições de tempo que descrevem a distribuição de temperatura no corpo para um momento inicial de tempo;
- condições de contorno, definido a interação do corpo investigado com o meio ambiente.

As condições geométricas são determinadas pela forma e tamanho do corpo no qual o processo de condução se realiza.



As condições físicas são dadas pelas propriedades físicas, tal como k, c, ρ , etc e precisa expressar a lei que governa a distribuição das fontes internas de calor. Estas podem produzir simplificações como:

k uniforme, isto é, independente da posição e da temperatura:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.1)$$

_ k uniforme e sem geração de calor:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) \text{ que é a } \underline{\text{Equação de Fourier}} \quad (1.3.2)$$

_ k uniforme, em regime permanente de condução de calor, com geração interna de calor:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) + \frac{g_v(\mathbf{r})}{k} = 0 \text{ que é a } \underline{\text{Equação de Poisson}} \quad (1.3.3)$$

_ k uniforme, regime permanente e sem geração de calor interno:

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0 \text{ que é a } \underline{\text{Equação de Laplace}} \quad (1.3.4)$$

Onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ é um vetor posição.

As condições iniciais precisam ser dadas para o estudo de processos transientes; elas estabelecem a lei de distribuição de temperatura dentro do corpo para um momento inicial de tempo. Em geral podem ser descritas como:

$$\forall t = 0 \rightarrow T = f(\mathbf{r}) \quad (1.3.5)$$

As condições de contorno podem ser dadas de diversas formas:

1.3.1 Condições de Contorno de Primeira Espécie

A distribuição de temperatura na superfície do corpo é dada a cada momento de tempo por:

$$T_{\partial\Omega} = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.6)$$

onde $T_{\partial\Omega}$ é a temperatura da superfície.



A equação acima pode ser simplificada no caso particular quando a temperatura da superfície permanece constante durante a realização do processo de transferência de calor e adquire a seguinte forma:

$$T_{\partial\Omega} = \text{constante} \quad (1.3.7)$$

1.3.2 Condições de Contorno de Segunda Espécie

Aqui as velocidades de fluxo de calor (taxa de fluxo de calor), são dadas para cada ponto da superfície do corpo e para qualquer momento de tempo, podendo ser expressa analiticamente assim:

$$q_{\partial\Omega} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.8)$$

onde $q_{\partial\Omega} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$ = densidade de fluxo de calor na superfície do corpo, com $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ indica a diferenciação ao longo da normal à superfície $\partial\Omega$, dirigida para fora da superfície de contorno.

Nos casos simples o fluxo de calor permanece constante no tempo e, portanto em toda a superfície do corpo se tem:

$$q_{\partial\Omega} = q_0 = \text{constante} \quad (1.3.9)$$

Também, quando $q_{\partial\Omega} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$ no contorno, temos uma condição de contorno homogênea de 2ª espécie, que corresponde a uma superfície isolada.

1.3.3 Condições de Contorno de Terceira Espécie

Neste caso são conhecidas a que a temperatura e a lei que governa a transferência de calor entre a superfície do corpo e o meio ambiente. Este tipo de condição limite descreve a lei de transferência de calor entre a superfície e o meio ambiente durante o aquecimento do corpo. A lei que descreve este processo é a Lei de Newton.

O processo de trocas de calor entre a superfície do corpo e o meio ambiente é muito complexo e depende de um número muito grande de variáveis.

De acordo com a Lei de Newton a quantidade de calor transferida ou removida de uma superfície unitária em uma unidade de tempo é proporcional á diferença entre a temperatura $T_{\partial\Omega}$ da superfície e a temperatura T_{∞} do meio ambiente ($T_{\partial\Omega} > T_{\infty}$):



$$q \propto (T_{\partial\Omega} - T_{\infty}) \rightarrow q = \alpha (T_{\partial\Omega} - T_{\infty}) \quad (1.3.10)$$

onde α é um fator de proporcionalidade chamado “coeficiente de transferência de calor” ou “coeficiente de película”. Sua unidade é $[\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}]$ ou $[\text{kcal}/\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}]$.

O coeficiente de transferência de calor é a medida de intensidade de transferência de calor entre a superfície do corpo e o meio ambiente, e é numericamente igual a quantidade de calor removida de, ou cedida para, por unidade de área, numa unidade de tempo para uma diferença de temperatura de um grau entre a superfície e o meio ambiente.

De acordo com a lei da conservação da energia a quantidade de calor removida de uma unidade de área por unidade de tempo é igual à quantidade de calor por unidade de área da superfície por condução para um volume interno do corpo, isto é:

$$\alpha (T_{\partial\Omega} - T_{\infty}) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\partial\Omega} \quad (1.3.11)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal a superfície do corpo e o subscrito $\partial\Omega$ indica que a temperatura e o gradiente de temperatura pertencem à superfície (para $\mathbf{n} = \mathbf{0}$).

As condições de contorno de terceira espécie podem ser representadas por:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\partial\Omega} = -\frac{\alpha}{k} (T_{\partial\Omega} - T_{\infty}) \quad (1.3.12)$$

que virtualmente expressa a *lei da conservação da energia* para o caso particular da superfície de um corpo.

1.3.4 Condições de Contorno de Quarta Espécie.

Define o processo de condução entre um simples corpo, ou um sistema de corpos e o meio ambiente. Os corpos são considerados em perfeito contato (as superfícies em contato têm a mesma temperatura).

Nas condições consideradas, os fluxos de calor através das superfícies de contato são iguais a:

$$k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\partial\Omega} = k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\partial\Omega} \quad (1.3.13)$$



1.4 Utilização de Parâmetros Adimensionais em Problemas de Condução de Calor

Seja um sólido Ω estacionário, homogêneo e isotrópico, inicialmente a uma temperatura T_0 . Para tempos $t > 0$, é gerado calor no interior de Ω e este calor será dissipado por convecção através da superfície de contorno $\partial\Omega$ para um meio que envolve Ω , cuja temperatura é T_∞ . Dessa forma a equação que rege a condução de calor nesta região finita Ω é (1.2.22):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c \cdot \rho} \operatorname{div}[k \cdot \operatorname{grad}(T)] + \frac{g_v}{c \cdot \rho}$$

Considerando k constante se tem

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{k}{c \cdot \rho} \operatorname{div}[\operatorname{grad}(T)] + \frac{g_v}{c \cdot \rho} \\ \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} &= \operatorname{div}[\operatorname{grad}(T)] + \frac{g_v}{k} \therefore a = \frac{k}{c \cdot \rho} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

As condições de contorno são:

$-k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} = \alpha(T_i - T_\infty)$ sobre a superfície de contorno $\partial\Omega_i$, onde $i = 1, 2, \dots$ são as diversas superfícies de contorno que formam o contorno total $\partial\Omega$, para $\tau > 0$.

$$T = T_0 \text{ em } \Omega \text{ e } t = 0$$

Adimensionalizando se tem: seja L o comprimento característico do corpo e sejam as relações adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{L}, \text{ coordenada } x \text{ adimensional;}$$

$$\eta = \frac{y}{L}, \text{ coordenada } y \text{ adimensional;}$$

$$\zeta = \frac{z}{L}, \text{ coordenada } z \text{ adimensional;}$$

$\frac{\partial}{\partial N}$, diferenciação ao longo da normal, dirigida para fora, no novo sistema de coordenadas

$$(\xi, \eta, \zeta);$$



$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0 - T_\infty}, \text{ temperatura adimensional;}$$

e
$$\tau = \frac{at}{L^2}, \text{ tempo adimensional}$$

Levando essas relações a equação (1.4.1) se tem

$$\frac{T_0 - T_\infty}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{T_0 - T_\infty}{L} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{g_v}{k} \quad (1.4.2)$$

com a seguinte condição de contorno:

$$-\frac{k_i}{L} \frac{\partial \theta}{\partial N_i} = \alpha_i \theta \quad (1.4.3)$$

Arrumando as equações (1.4.2) e (1.4.3), temos

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + \Phi = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (1.4.4)$$

sobre Ω para $\tau > 0$, e

$$\frac{\partial \theta}{\partial N_i} + Bi_i \theta = 0 \quad (1.4.5)$$

sobre todos os $\partial \Omega_i$ para $\tau > 0$ e $\theta = 1$ em Ω para $\tau = 0$

Os agrupamentos adimensionais que aparecem acima são:

$$\tau = \frac{at}{L^2} = \frac{\left(\frac{k}{L}\right)L^2}{\frac{\rho c_p L^3}{t}} = \text{Numero de Fourier}$$

e representa a relação entre a taxa de calor conduzido através do comprimento referencial L no volume L^3 em $[W/K]$ pela taxa de energia armazenada no volume de referencia L^3 $[W/K]$.

$$\Phi = \frac{g_v L^2}{k(T_0 - T_\infty)} = \frac{g_v L^3}{\left(\frac{k}{L}\right)L^2(T_0 - T_\infty)}$$

que é a relação entre a taxa de geração de calor no volume L^3 em $[W]$ pela taxa de condução de calor através do comprimento referencial L no volume L^3 e com uma diferença de temperatura igual a $T_0 - T_\infty$ em $[W]$.



$$Bi = \frac{\alpha L}{k} = \frac{\alpha}{\left(\frac{k}{L}\right)} = \text{Numero de Biot}$$

e representa a relação entre o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície do sólido pela condutância unitária do sólido através da espessura de referencia L .

Observamos que na prática quando $Bi < 0,1$ despreza-se a descrição espacial da temperatura considerando a temperatura apenas função do tempo, o que simplifica sensivelmente a equação de condução de calor.

Entretanto, quando $Bi > 0,1$, necessariamente tem que considerar a descrição espacial da temperatura, e a equação será a equação diferencial parcial (1.4.4) com a condição de contorno (1.4.5).

1.5 Condução Através de Parede Plana

A *Lei de Fourier* pode ser usada para se achar as fórmulas de cálculos da condução de calor.

1.5.1 Parede Homogênea

Seja uma parede homogênea de espessura δ . A condutividade térmica k do material é constante. Temperaturas constantes T_1

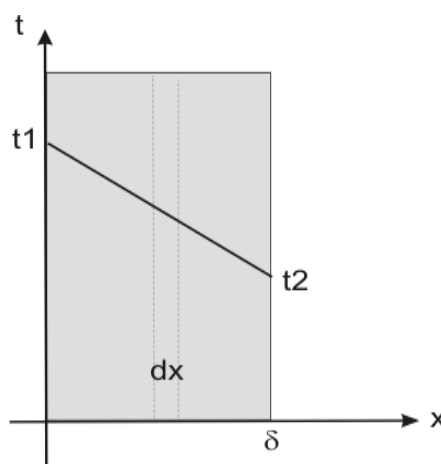
e T_2 são mantidas nas proximidades das superfícies da parede. A temperatura varia apenas na direção do eixo x , perpendicular à parede. Assim, o campo de temperaturas é unidimensional e as superfícies isotérmicas são planas e perpendiculares ao eixo x .

Consideremos interna à parede uma camada de espessura dx localizada a uma distância x da outra superfície e limitada por duas superfícies isotérmicas. Baseada na Lei de Fourier se tem:

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad (1.5.1)$$

1.5.2 Separando as variáveis

$$dT = -\frac{q}{k} dx$$





Integrando a equação se obtém:

$$T = -\frac{q}{k}x + C \quad (1.5.2)$$

A constante de integração C é determinada pelas condições de contorno, isto é, quando $x = 0 \Rightarrow T = T_1$, substituindo este valor na equação se obtém o valor de C :

$$T_1 = \frac{q}{k}(x = 0) + C \rightarrow C = T_1$$

Quando $x = \delta \rightarrow T = T_2$, logo

$$T_2 = -\frac{q}{k}\delta + T_1$$

Assim, para determinar o valor desconhecido do fluxo de calor q por unidade de área, se tem:

$$q = \frac{k}{\delta}(T_1 - T_2) = \frac{k}{\delta}\Delta T \left[\frac{kcal}{m^2h} \right] \text{ ou } \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (1.5.3)$$

Assim a quantidade de calor transferida através de 1 m^2 por hora é diretamente proporcional à *condutividade térmica* k e à diferença de temperatura nas superfícies limites e inversamente proporcional à espessura da parede.

A razão $\frac{k}{\delta} \left[\frac{kcal}{m^2h^\circ C} \right]$ é a “*condutância térmica*” da parede e o seu recíproco é a “*resistência térmica da parede*”. Este último determina a queda na temperatura quando a velocidade do fluxo de calor através de área unitária da parede é unitária.

Havendo determinado a velocidade de fluxo de calor por unidade de área q , pela fórmula acima, é fácil calcular a quantidade total de calor Q transferido através da parede plana de superfície com área de $A \text{ [m}^2\text{]}$ em τ horas:

$$Q = q \cdot A \cdot t = \frac{k}{\delta} \Delta T \cdot A \cdot t \left[kcal \right] \text{ ou } \left[kJ \right] \quad (1.5.4)$$

A equação da curva de temperaturas será:

$$T_x = -\frac{q}{k}x + T_1$$

onde $q = -\frac{k}{\delta}(T_1 - T_2)$, logo



$$T_x = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x \quad (1.5.5)$$

Esta última equação de uma linha reta. Então, quando a *condutividade térmica* é constante, a variação da temperatura através de paredes homogêneas é linear.

Entretanto, devido a sua dependência para a temperatura, a *condutividade térmica* é variável. Se levarmos isso em consideração, nos desviaremos para outras formas de cálculos mais complicados.

1.5.3 Condutividade Térmica dependente da Temperatura.

Para muitos materiais a relação entre a *condutividade térmica* e a *temperatura* é linear conforme estabelecido em (1.1.5):

$$k(T) = k_0(1 + \beta T) \quad (1.5.6)$$

Neste caso, a Lei de Fourier permite escrever a seguinte equação para uma parede plana:

$$q = -k(T) \frac{dT}{dx} = -k_0(1 + \beta T) \frac{dT}{dx} \quad (1.5.7)$$

separando as variáveis e integrando vem,

$$q \cdot x = -k_0 \left(T + \frac{\beta T^2}{2} \right) + C \quad (1.5.8)$$

substituindo os limites na equação acima se tem,

$$\text{Para } x = 0, T = T_1 \rightarrow 0 = -k_0 \left(T_1 + \frac{\beta T_1^2}{2} \right) + C$$

$$\text{Para } x = \delta, T = T_2 \rightarrow q\delta = -k_0 \left(T_2 + \frac{\beta T_2^2}{2} \right) + C$$

subtraindo uma expressão da outra, se acha:

$$q\delta = k_0 \left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_2^2) \right] \quad (1.5.9)$$

onde



$$q = \frac{k_0}{\delta} \left(1 + \beta \frac{T_1 + T_2}{2} \right) (T_1 - T_2) \quad (1.5.10)$$

Esta equação é mais complexa do que a anteriormente encontrada. Neste caso, assumiremos a condutividade térmica como constante e igual a certo valor médio:

$$k_m = k_0 \left(1 + \beta \frac{T_1 + T_2}{2} \right) = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (1.5.11)$$

Assim, se k_m for determinada pela equação acima, isto é, pela média aritmética das temperaturas limites da parede, então as fórmulas (1.5.3) e (1.5.10) são equivalentes.

A equação da curva mostrando a distribuição de temperatura da parede é:

$$T_x = \frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{1}{\beta} + T_1 \right)^2 - \frac{2q \cdot x}{\beta \cdot k_0}} \quad (1.5.12)$$

Esta equação revela que a temperatura na parede muda ao longo de uma linha curva. Se for “ β ” for positiva, a convexidade da curva é voltada para cima; e se “ β ” for negativo, a convexidade é voltada para baixo.

1.5.4 Parede Homogênea com Propriedades Constantes e Fluxo não Estacionário

Seja o problema homogêneo dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{r} \in \Omega \wedge t > 0 \\ k_i \frac{\partial}{\partial n_i} T(\mathbf{r}, t) + \alpha_i(\mathbf{r}, t) &= 0 \rightarrow \mathbf{r} \in \partial\Omega \wedge t > 0 \\ T(\mathbf{r}, 0) &= F(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{r} \in \Omega \wedge t = 0 \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Aplicando a separação de variável, se tem,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) &= \Psi(\mathbf{r}) \Upsilon(t) \\ \Upsilon(t) \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\beta} \Psi(\mathbf{r}) \frac{d}{dt} \Upsilon(t) \\ \frac{\nabla^2 \Psi(\mathbf{r})}{\Psi(\mathbf{r})} &= \frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} \frac{\Upsilon(t)}{\Upsilon(t)} = -\lambda^2 \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Resolvendo a terceira expressão de (1.5.14) para a variável temporal, lembrando que λ são autofunções:



$$\frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} \Upsilon(t) = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \Upsilon(t) + \beta \lambda^2 \Upsilon(t) = 0 \quad (1.5.15)$$

$$\Upsilon(t) = e^{-\beta \lambda_n^2 t}$$

A terceira expressão de (1.5.14) para a função da posição é a equação de Helmholtz definida em uma região Ω :

$$\frac{\nabla^2 \Psi(\mathbf{r})}{\Psi(\mathbf{r})} = -\lambda^2 \rightarrow \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \lambda^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \therefore \mathbf{r} \in \Omega \quad (1.5.16)$$

$$k_i \frac{\partial}{\partial n_i} \Psi(\mathbf{r}) + \alpha_i(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \mathbf{r} \in \partial \Omega \wedge t > 0$$

cuja solução é do tipo $\sum_{m=1}^{\infty} C_m \Psi_m(\mathbf{r})$. Dessa maneira levando esses resultados na primeira expressão de (1.5.14)

se acha

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \Psi_m(\mathbf{r}) \cdot e^{-\beta \lambda_m^2 t} \quad (1.5.17)$$

Aplicando em (1.5.17) a condição inicial representada pela terceira expressão de (1.5.13) se tem

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, 0) &= F(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{r} \in \Omega \wedge t = 0 \\ T(\mathbf{r}, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \Psi_m(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Se as funções $\Psi_m(\mathbf{r})$ na região Ω de definição forem ortogonais, então os coeficientes C_m podem ser encontrados utilizando-se a propriedade de ortogonalidade das autofunções $\Psi_m(\mathbf{r})$:

$$\int_{\Omega} \Psi_m(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{mn} \quad \therefore \begin{cases} \delta_{mn} = 0 \Leftrightarrow m \neq n \\ \delta_{mn} = \|\Psi_n(\mathbf{r})\| \Rightarrow m = n \end{cases} \quad (1.5.19)$$

Assim, se fizermos o produto das funções:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= C_n \int_{\Omega} \Psi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ \rightarrow C_n &= \frac{\int_{\Omega} F(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int_{\Omega} \Psi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} = \frac{\int_{\Omega} F(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{N} \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

Logo



$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \Psi_m(\mathbf{r}) \cdot e^{-\beta \lambda_m^2 t} \quad (1.5.21)$$

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta \lambda_m^2 t}}{N} \Psi_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Omega} F(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Exercício 1: Encontre a temperatura T_2 da superfície de uma parede, cuja espessura é 15 cm e a condutividade térmica é 1,10 kcal/m.h.°C. Sabe-se que a temperatura $T_1 = 50$ °C.

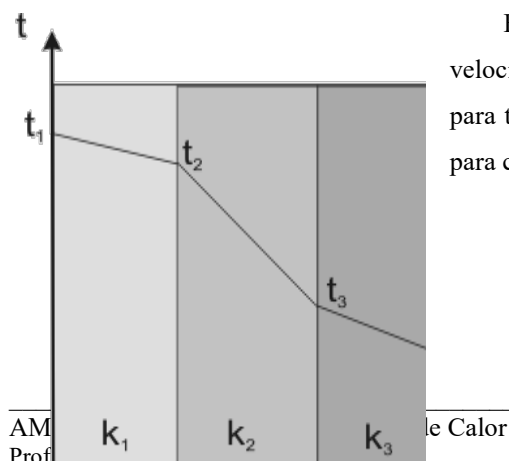
Exercício 2: Qual deve ser a espessura de uma parede cuja condutividade térmica é 0,84 kcal/m.h.°C (parede velha de tijolos), se a temperatura interna deve ser de no máximo 25°C e a temperatura máxima no exterior é de 40°C.

1.5.5 Composição de Paredes Planas

Paredes com diversas camadas homogêneas são chamadas de “compostas”. Semelhantes são as paredes de casas de moradia, onde os tijolos são revertidos com camadas de outro material interna e externamente. As paredes de fornalhas, caldeiras e outros aparelhos consistem usualmente de diversas camadas: uma de refratário, uma de tijolo convencional e uma outra camada de isolante térmico.

Consideramos que a parede consiste de diversas, por exemplo, três camadas homogêneas em contato íntimo entre si.

As espessuras são respectivamente $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e as condutividades térmicas das camadas k_1, k_2, k_3 . As temperaturas T_1 e T_4 , nas faces externas da parede são conhecidas. No contato entre as camadas, as superfícies adjacentes têm uma e a mesma temperatura, mas seus valores são conhecidos. Denominaremos a estas de T_2 e T_3 .



Em condições de estado-estático ou regime estacionário, a velocidade de fluxo de calor por unidade de área é constante e a mesma para todas as camadas. Assim, as seguintes equações podem ser escritas para cada camada, com base na equação (1.5.2):



$$\begin{aligned}q &= -\frac{k_1}{\delta_1}(T_1 - T_2) \\q &= -\frac{k_2}{\delta_2}(T_2 - T_3) \\q &= -\frac{k_3}{\delta_3}(T_3 - T_4)\end{aligned}\tag{1.5.22}$$

e

$$\begin{aligned}T_1 - T_2 &= q \frac{\delta_1}{k_1} \\T_2 - T_3 &= q \frac{\delta_2}{k_2} \\T_3 - T_4 &= q \frac{\delta_3}{k_3}\end{aligned}\tag{1.5.23}$$

Somando os membros à esquerda e a direita, do sistema de equações acima, temos:

$$T_1 - T_4 = q \left(\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3} \right)\tag{1.5.24}$$

Esta relação é usada na determinação do fluxo de calor por unidade de área:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3} \right)} \left[\frac{W}{m^2} \right] \text{ ou } \left[\frac{kcal}{m^2 h} \right]\tag{1.5.25}$$

Se não forem 3 camadas e sim n camadas, ter-se-á:

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{k_i}} \left[\frac{W}{m^2} \right] \text{ ou } \left[\frac{kcal}{m^2 h} \right]\tag{1.5.26}$$

Para cada termo, o denominador da equação acima, representa a resistência térmica da respectiva camada, e seque que, a resistência térmica total de uma parede composta é igual á soma das resistências individuais de cada camada.

A partir, então das fórmulas encontradas, podemos determinar as temperaturas desconhecidas T_2 e T_3 :



$$T_2 = T_1 - q \frac{\delta_1}{k_1}$$

$$T_3 = T_2 - q \frac{\delta_2}{k_2} = T_1 - q \left(\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} \right) = T_4 + q \frac{\delta_3}{k_3} \quad (1.5.27)$$

A curva de temperatura interna a cada camada é uma linha reta, mas para a parede composta, a distribuição de temperatura é representada por uma linha quebrada;

Entretanto, para simplificar os cálculos, a camada composta pode ser considerada como uma parede homogênea de espessura D , e os cálculos são feitos com a chamada “condutividade térmica equivalente”, cujo valor é determinado pela seguinte relação:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3}} = \frac{k_{equiv}}{D} (T_1 - T_4) \quad (1.5.28)$$

$$k_{equiv} = \frac{D}{\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3}} \left[\frac{kcal}{m.h.^{\circ}C} \right] \text{ ou } \left[\frac{W}{m.K} \right] \quad (1.5.29)$$

onde $D = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$

Para uma parede composta de n camadas, podemos escrever:

$$k_{equiv} = \frac{\sum \delta_i}{\sum \left(\frac{\delta_i}{k_i} \right)} \quad (1.5.30)$$

A condutividade térmica equivalente depende da resistência térmica e da espessura de cada camada.

Na dedução da expressão para uma parede composta, assumimos a existência de um perfeito contato entre as camadas e que as temperaturas nas faces de contato de camadas adjacentes eram as mesmas. Entretanto, se as superfícies forem rugosas, o contato perfeito é impossível, e há existência de filmes de ar entre as camadas. Como o ar é um mal condutor de calor ($k = 0,02$), então esses filmes de ar, podem levar a uma considerável redução da condutividade térmica equivalente da parede composta. Uma película de qualquer óxido metálico, afeta a condutividade térmica de modo semelhante. Assim, no cálculo, e especialmente nas medidas da condutividade térmica da parede, é necessária uma especial atenção para os contatos entre as camadas, principalmente se estas estão sujeitas a corrosão.

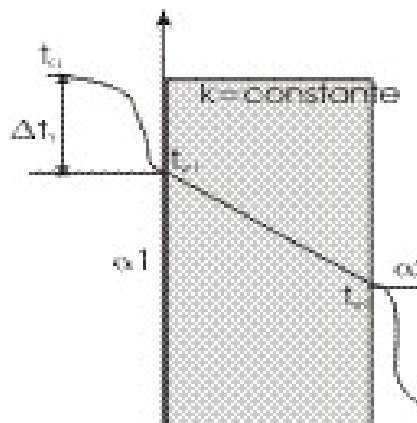


1.5.6 Condições de Contorno De 3º Espécie Para Paredes Planas

O transporte de calor de um meio móvel (líquido ou gás) para outro através de uma parede sólida simples ou composta, de qualquer forma, separando os dois meios, é referenciada como “transferência de calor”. O processo envolve a transferência de calor de um fluido quente para a parede, a transferência de calor por condução através da parede e transferência de calor da parede separadora para o meio móvel frio. Consideremos a transferência de calor através de paredes compostas e homogêneas.

Seja uma parede plana homogênea de espessura δ , onde seja conhecido:

- condutividade térmica da parede
- temperaturas ambientes T_{f1} e T_{f2}
- coeficiente de transferência de calor ou coeficiente de película (ver transferência de calor por convecção) α_1 e α_2 .



Considerando que T_{f1} , T_{f2} , α_1 e α_2 sejam constantes e não mudem ao longo da superfície, isso permite considerar a variação de temperaturas apenas na direção normal da parede. Assim é necessário para achar a quantidade de fluxo de calor, nas condições dadas, do fluido quente para o fluido frio, e as temperaturas das superfícies da parede.

A velocidade de fluxo de calor do fluido quente para a parede é determinada pela equação:

$$q = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1}) \quad (1.5.31)$$

Nas condições estacionárias a mesma quantidade de calor será transferida através da parede, por condução:

$$q = \left(\frac{k}{\delta} \right) (T_{w1} - T_{w2}) \quad (1.5.32)$$

A mesma quantidade de calor é transferida da superfície da parede para o fluido frio:

$$q = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}) \quad (1.5.33)$$

Podemos representar as equações acima da seguinte forma:



$$\begin{aligned}(T_{f1} - T_{w1}) &= q \left(\frac{1}{\alpha_1} \right) \\ (T_{w1} - T_{w2}) &= q \left(\frac{\delta}{k} \right) \\ (T_{w2} - T_{f2}) &= q \left(\frac{1}{\alpha_2} \right)\end{aligned}\tag{1.5.34}$$

somando termo a termo, achamos:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = T_{f1} - T_{f2}\tag{1.5.35}$$

ou

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} \left[\frac{kcal}{m^2 \cdot h} \right] \text{ ou } \left[\frac{W}{m^2} \right]\tag{1.5.36}$$

onde

$$\alpha_{glb} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} \left[\frac{kcal}{m^2 \cdot ^\circ C} \right] \text{ ou } \left[\frac{W}{m^2 K} \right]\tag{1.5.37}$$

α_{glb} tem a mesma dimensão de α_1 e α_2 e é chamado de coeficiente global de transmissão de calor ou coeficiente global de película. Ele define a intensidade de transferência de calor de um fluido para outro através de uma parede separadora, e é numericamente igual a quantidade de calor passando através de uma unidade de área da superfície da parede em uma unidade de tempo para uma diferença de 1° C.

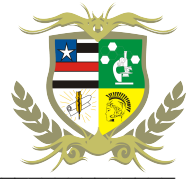
O recíproco desse coeficiente é denominado de “resistência térmica global de transferência de calor”.

A *resistência térmica global* para uma parede homogênea de uma só camada é:

$$R = \frac{1}{\alpha_{glb}} = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \right)\tag{1.5.38}$$

A equação acima nos diz que a resistência térmica global é a soma das resistências térmicas separadas, onde:

- $\frac{1}{\alpha_1} = R_1$ é a resistência térmica de transferência de calor do fluido quente para a parede;



- $\frac{\delta}{k} = R_2$ é a resistência térmica de transferência de calor por condução transversal na parede;
- $\frac{1}{\alpha_2} = R_3$ é a resistência térmica de transferência de calor da parede para o fluido frio.

Assim, a resistência térmica global de uma parede composta é a soma das resistências térmicas das camadas componentes. Se a parede consiste de camadas com resistências térmicas diferentes, a resistência térmica global será dada por:

$$R = \frac{1}{\alpha_{\text{glb}}} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{k_1} + \dots + \frac{\delta_n}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (1.5.39)$$

$$R = \frac{1}{\alpha_{\text{glb}}} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i}{k_i} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \quad (1.5.40)$$

A velocidade de fluxo de calor através da parede composta de n camadas será:

$$q = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i}{k_i} \right) + \frac{1}{\alpha_2}} = \alpha_{\text{glb}} \cdot \Delta t$$

O fluxo de calor em [W] ou [kcal/h] através da superfície de área A da parede será:

$$Q = q \cdot A = \alpha_{\text{glb}} \cdot A \cdot \Delta T \quad (1.5.41)$$

As temperaturas das superfícies de uma parede simples homogênea podem ser achadas por:

$$T_{w1} = T_{f1} - q \frac{i}{\alpha_1}$$
$$T_{w2} = T_{f1} - q \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{k} \right)$$



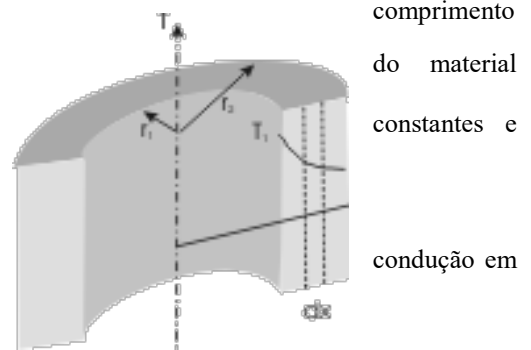
1.6 Condução Através de Paredes Cilíndricas

1.6.1 Paredes Homogêneas

Consideramos uma parede cilíndrica (tubo) de 1 metro de comprimento com raio interno r_1 e raio externo r_2 . A condutividade térmica k é constante. As faces internas e externas têm temperaturas iguais a T_1 e T_2 com a condição que $T_1 > T_2$.

Neste caso é conveniente escrever a equação diferencial da condução em um sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.6.1)$$



O eixo OZ coincide com o eixo do tubo. Nas condições dadas a temperatura só muda na direção radial, e o campo de temperatura é unidimensional. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Além disso, como a temperatura das superfícies interna e externa da parede são constantes, as superfícies isotérmicas são cilíndricas e seus eixos coincidem com o eixo do tubo. Assim, a temperatura também não muda ao longo de φ , isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Assim, a equação da condução fica reduzida a:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1.6.4)$$

As condições limites ou de contorno são:



Para $r = r_1$ $T = T_1$

Para $r = r_2$ $T = T_2$

Resolvendo a equação acima, nós obteremos a equação do campo de temperatura em uma parede cilíndrica:

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (1.6.5)$$

ou, em relação aos diâmetros:

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln\left(\frac{d}{d_1}\right)}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

A expressão acima é uma equação de uma curva logarítmica. A distribuição curvilínea da temperatura em uma parede cilíndrica pode ser explicada pelo que se segue.

No caso de paredes planas, a velocidade de transferência de calor \mathbf{q} é a mesma para todas as superfícies isotérmicas. Numa parede cilíndrica a velocidade de transferência de calor através de uma superfície isotérmica depende do raio.

A quantidade de calor passando através de uma superfície cilíndrica A por unidade de tempo pode ser achada pela Lei de Fourier³ (1.1.3):

$$Q = -kA \frac{dT}{dr} \quad (1.6.6)$$

Substituindo o valor do gradiente de temperatura dado por $dT = C_1 \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = C_1 \frac{1}{r}$ na fórmula de Fourier e tendo em vista que $A = 2\pi rl$ tem-se:

³ $\mathbf{q} = -k \cdot \nabla T \left[\frac{kcal}{m.h} \right] \text{ ou } \left[\frac{W}{m} \right]$



$$Q = \frac{2\pi kl(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} [W] \text{ ou } \left[\frac{kcal}{h} \right] \quad (1.6.7)$$

Da equação (1.6.7) acima, verifica-se que a quantidade de calor passando através de uma parede cilíndrica por unidade de tempo é completamente definida pelas condições de contorno e não depende do raio. O fluxo de calor pode ser dado ou para a unidade de comprimento do tubo ou para unidade de área da superfície interna ou externa. Assim, obtemos as seguintes fórmulas para a taxa de fluxo de calor $[W/m^2]$ ou $[kcal/m^2.h]$:

$$\frac{Q}{\pi d_1 l} = q_1 = \frac{2k(T_1 - T_2)}{d_1 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \left[\frac{W}{m^2} \right] \text{ ...fluxo de calor através de área unitária da superfície interna.}$$

$$\frac{Q}{\pi d_2 l} = q_2 = \frac{2k(T_1 - T_2)}{d_2 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \left[\frac{W}{m^2} \right] \text{ ...fluxo de calor através de área unitária da superfície externa.}$$

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2k} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \left[\frac{W}{m} \right] \text{ ... fluxo de calor por unidade de comprimento.}$$

Se levarmos em consideração a dependência da condutividade térmica da temperatura segundo a equação:

$$k(T) = k_0(1 + bT) \quad (1.6.8)$$

pede-se mostrar que q_l pode ser cálculo pela fórmula dada anteriormente, usando \bar{k} = constante = valor médio = \bar{k} :

$$q_l = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{2\bar{k}}\right) \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \quad (1.6.9)$$

onde $\bar{k} = \frac{\int_{T_2}^{T_1} k(T) dt}{(T_1 - T_2)}$. Para acharmos o campo de temperaturas para o caso em que a condutividade térmica segue a lei estabelecida pela equação (1.6.8), podemos usar a equação de Fourier aplicada a uma parede cilíndrica:

$$q_l = -k(t).2\pi r. \frac{dT}{dr} \quad (1.6.10)$$



Separando as variáveis e integrando para os limites $r = r_1$ e r , $T = T_1$ e T , e tirando o valor de T da integral obtida, achamos a seguinte expressão para o campo de temperaturas:

$$T = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_1\right)^2 - \frac{q_l \ln\left(\frac{d}{d_1}\right)}{\pi b k_0}} \quad (1.6.11)$$

1.6.2 Parede Composta

Consideramos uma parede cilíndrica composta de diversas, no nosso caso três, camadas homogêneas. As superfícies adjacentes têm a mesma temperatura, visto ser considerado um perfeito contato entre elas.

Os diâmetros e as condutividades térmicas de cada camada são conhecidos. As temperaturas de contato T_2 e T_3 são desconhecidas, enquanto que as temperaturas T_1 e T_4 das superfícies interna e externa são conhecidas. Nas condições estacionárias, a quantidade de calor passando através de cada camada é a mesma e constante. Assim, temos para as três camadas consideradas, respectivamente:

$$\begin{aligned} q_l &= \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \\ q_l &= \frac{2\pi(T_2 - T_3)}{\frac{1}{k_2} \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)} \\ q_l &= \frac{2\pi(T_3 - T_4)}{\frac{1}{k_3} \ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right)} \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Estas equações são empregadas para determinar a distribuição de temperatura em cada camada:



$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \\ T_2 - T_3 &= \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{k_2} \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) \\ T_3 - T_4 &= \frac{q_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{k_3} \ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right) \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

A soma das diferenças de temperaturas em cada camada constitui a diferença de temperatura total da parede composta. Adicionando ou somando os membros da esquerda e da direita das equações acima, temos:

$$T_1 - T_4 = \frac{q_l}{2\pi} \left(\frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{k_2} \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{1}{k_3} \ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right) \right) \quad (1.6.14)$$

onde podemos usar esta equação para determinar a taxa de transferência de calor q_l :

$$q_l = \frac{2\pi \cdot (T_1 - T_4)}{\left(\frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{k_2} \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{1}{k_3} \ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right) \right)} \quad (1.6.15)$$

Por analogia, se tivermos uma parede composta com n camadas, o valor de q_l será:

$$q_l = \frac{2\pi (T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{k_i} \ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) \right]} \quad (1.6.16)$$

dado em [W/m] ou [kcal/m.h], dependendo da unidade de k se dada em [W/m.°C] ou [kcal/m.h.°C] respectivamente.

Substituindo agora q_l nas equações das diferenças de temperatura das camadas, vem:

$$T_{n+1} = T_1 - \frac{q_l}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{k_i} \ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) \right] \quad (1.6.17)$$

1.7 Condições de Contorno de 3ª Espécie – Paredes Cilíndricas

Consideremos uma parede cilíndrica e homogênea com condutividade térmica k constante. As quantidades conhecidas incluem as temperaturas dos meios moveis T_{f1} e T_{f2} e os coeficientes de transferência de calor das



superfícies interna e externa do tubo α_1 e α_2 também constantes, as quais são necessárias para o cálculo de q_l e

T_{parede} .

Consideremos o tubo de comprimento infinito quando comparado com a espessura da parede. Os calores desperdiçados ou perdidos nos limites do tubo, pode ser desprezado, e nas condições de estacionariedade (estado estacionário), a quantidade de calor transferido do fluido para a superfície da parede e aquele transmitido pela seção transversal da parede e cedido ao fluido frio será sempre o mesmo. Assim temos:

$$\begin{aligned}
 q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (T_{f1} - T_{p1}) \\
 q_l &= \frac{\pi (T_{p1} - T_{p2})}{\frac{1}{2k} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right)} \\
 q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (T_{p2} - T_{f2})
 \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Rearrmando, se tem:

$$\begin{aligned}
 T_{f1} - T_{p1} &= \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 d_1} \\
 T_{p1} - T_{p2} &= \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) \\
 T_{p2} - T_{f2} &= \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 d_2}
 \end{aligned}$$

Somando estas equações, membro a membro, obtemos a diferença total de temperatura:

$$T_{f1} - T_{f2} = \frac{q_l}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right) \tag{1.7.3}$$

ou seja

$$q_l = \frac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)} = \alpha_{\text{glb}} \pi (T_{f1} - T_{f2}) \tag{1.7.4}$$

onde $\alpha_{\text{glb}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)}$ $[W/m^2 \cdot ^\circ C]$ é chamado de *coeficiente global de transmissão de calor*, que é definido de forma semelhante ao visto para paredes planas.



Para a transferência de calor através de paredes cilíndricas compostas, o sistema de equação (1.7.4) pode ser refeito com a inclusão da resistência térmica para condução de todas as camadas, isto é:

$$q_l = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2k_i} \ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}\right)} = \alpha_{\text{glb}} \pi(T_{f1} - T_{f2}) \quad (1.7.5)$$

onde

$$\alpha_{\text{glb}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2k_i} \ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}\right)}$$

é chamado de “coeficiente global de película” ou de “coeficiente global de transferência de calor” e é mensurado em [W/m.°C] ou [kcal/m.h.°C].

A temperatura na interface ($m+1$) entre a camada m e a camada (m+1) será:

$$T_{p_{m+1}} = T_{f1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2k_i} \ln\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{m+1}} \right) \quad (1.7.6)$$

1.8 Condução de Calor de uma Parede Esférica

Consideramos agora o fluxo de calor através de uma parede de uma esfera oca com raio interno r_1 , externo r_2 . A esfera é feita de material homogêneo de condutividade térmica constante e igual a k . As superfícies internas e externas têm temperaturas iguais à T_1 e T_2 , respectivamente e T_1 maior que T_2 . Neste caso a temperatura só varia na direção do raio, ou seja, na direção radial da esfera. Assim, a equação diferencial da condução de calor adquire em coordenadas esféricas a seguinte forma:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (1.8.1)$$

As condições de contorno são:

Para $r = r_1$ $T = T_1$

Para $r = r_2$ $T = T_2$

Integrando, então, a equação (1.8.1) dada acima se tem:



$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

integrando outra vez, vem:

$$T = C_2 - \frac{C_1}{r} \quad (1.8.2)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 na equação (1.8.2) acima, são determinadas pelas condições de contorno.

Assim:

- para T_1 temos $T_1 = C_2 - \frac{C_1}{r_1}$
- para T_2 temos $T_2 = C_2 - \frac{C_1}{r_2}$

resolvendo o sistema acima, encontramos:

$$C_1 = - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (1.8.3)$$

e

$$C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \left(\frac{1}{r_1} \right) \quad (1.8.4)$$

Sabemos também que a quantidade de calor transferida através de uma área A de uma parede esférica, por unidade de tempo é dada pela equação de Fourier:

$$Q = -k \nabla T A = -k \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \quad (1.8.5)$$

substituindo então as equações (1.8.4), (1.8.3) na equação (1.8.2), substituindo o $\frac{dT}{dr}$ desta equação na de

Fourier, teremos:

$$Q = \frac{4\pi k (T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \pi k \left(\frac{d_1 d_2}{\delta} \right) \Delta T \therefore \delta = d_2 - d_1 \quad (1.8.6)$$

As expressões acima são usadas para os cálculos de transferência de calor por condução através de paredes esféricas.



$$T_r = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

que representa a equação da distribuição de temperaturas em uma esfera e representa geometricamente uma hipérbole quando o coeficiente de condutibilidade térmica for constante.

1.8.1 Condições de Contorno de Terceira Espécie – Paredes Esféricas

As condições de contorno incluem além do raio interno r_1 , externo r_2 , as temperaturas T_{f1} e T_{f2} , e os coeficientes locais de transferência de calor α_{f1} e α_{f2} entre as superfícies da esfera e os meios ambientes, ocupados por um fluido qualquer. As temperaturas T_{f1} e T_{f2} , e os coeficientes α_{f1} e α_{f2} são considerados constantes no tempo.

Assim, a condução é um regime estacionário e o fluxo de calor Q medido em [W] ou [kcal/h] é constante através de todas as superfícies isotérmicas. Desta forma, podemos escrever o seguinte:

$$Q = \alpha_{f1} \pi d_1^2 (T_{f1} - T_1) \quad (1.8.7)$$

$$Q = 2k\pi \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\left(\frac{1}{d_1}\right) - \left(\frac{1}{d_2}\right)\right]}$$

$$Q = \alpha_{f2} \pi d_2^2 (T_2 - T_{f2})$$

Das equações acima, retiramos o valor de Q total:

$$Q = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\left(\frac{1}{\alpha_{f1}d_1^2}\right) + \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_{f2}d_2^2}\right)} \quad (1.8.8)$$

ou de uma forma reduzida

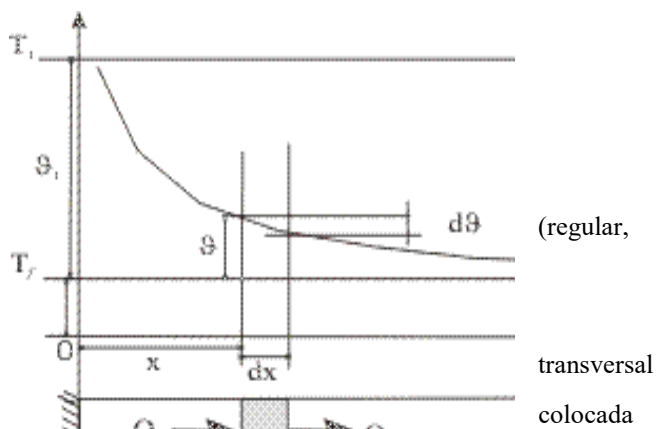
$$Q = \alpha_{esfera} \pi \cdot \Delta T \quad (1.8.9)$$



1.9 Condução de Calor Através de Barra Fina (Aleta) de Seção Transversal Constante.

1.9.1 Equação Diferencial e Sua Solução

As aletas podem ter várias seções transversais circular, triangular e outras, incluindo formas geométricas irregulares). Consideramos a propagação de calor em uma barra reta de seção constante A com o seu perímetro P ; a barra é



em um meio de temperatura constante T_f ; coeficiente de transferência de calor da superfície da barra com o meio ambiente é considerado constante para quaisquer das superfícies. Suponhamos também que a condutividade térmica do material é bastante grande, e a seção transversal da barra é extremamente pequena em relação ao seu tamanho ou comprimento. Por último negligenciar-se-á as variações de temperatura ao longo da seção transversal e considerar-se-á que a variação de temperatura ocorre somente ao longo do eixo da barra. Para simplificar os cálculos, $T_f = \text{constante}$, será considerada como temperatura de referência.

O excesso na temperatura de barra além da temperatura de referência será denotado por $\vartheta : \vartheta = T - T_f$, onde $T_f = \text{temperatura do meio}$ e $T = \text{temperatura da barra}$. Assim, para uma dada temperatura T_1 , na base da barra, o excesso de temperatura na base será: $\vartheta = T_1 - T_f$.

Considerando ao longo da barra um elemento dx distante de x da base, a equação do balanço térmico para esse elemento de barra será:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx}$$

Onde $Q_x = \text{quantidade de calor entrando na face esquerda do elemento, por unidade de tempo}$; $Q_{x+dx} = \text{quantidade de calor fluindo na face oposta do elemento, no mesmo tempo}$; $dQ = \text{quantidade de calor perdida, por unidade de tempo, para o meio ambiente pela outra face da barra}$.

De acordo com a lei de Fourier se tem:

$$Q_x = -k \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} A$$

$$Q_{x+dx} = -k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \right) \cdot A = -kA \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \right) \quad (1.9.1)$$



Consequentemente

$$Q_x - Q_{x+dx} = kA \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (1.9.2)$$

Por outro lado, de acordo com a lei de Newton: $dQ = \alpha_f \cdot \vartheta \cdot P dx$ $\therefore P$ = perímetro da seção transversal da barra. Igualando as duas últimas expressões, encontramos a equação diferencial da distribuição de temperatura em uma barra:

$$\alpha_f \cdot \vartheta \cdot P dx = kA \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (1.9.3)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha_f P}{k A} \vartheta \quad (1.9.4)$$

Fazendo $m^2 = \frac{\alpha_f P}{k A}$, a equação (1.9.4) acima terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} &= m^2 \cdot \vartheta \\ \therefore m &= \sqrt{\frac{\alpha_f P}{k A}} \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

É evidente que a expressão diferencial acima é válida para uma aleta na forma apresentada na figura acima e com tamanho constante, uma vez que o coeficiente de transferência de calor α_f é constante para a superfície interna, e a condutividade térmica k é constante sem considerar o intervalo de temperatura. Assim, a integral comum para a equação diferencial (1.9.5) acima será:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (1.9.6)$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno, que podem ser dadas de diversas maneiras, dependendo do comprimento da aleta e outros fatores.

1.9.2 Barra Infinita

A temperatura é mantida constante para a base ou na seção transversal inicial da barra, isto é, para $x = 0 \rightarrow \vartheta = \vartheta_1$. Se a barra é do comprimento infinito ($L = \infty$) todo o calor cedido a ela será desprezado para o meio ambiente, e para $x = \infty \rightarrow \vartheta = 0$. Substituindo estas condições de contorno acima temos:



$$\text{em } x = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = C_1 + C_2$$

$$\text{em } x = \infty \Rightarrow C_1 e^{\infty} = 0$$

A segunda igualdade acima é válida quando $C_1 = 0$. Assim $C_2 = \vartheta_1$. Substituindo os valores de C_1 e C_2 na equação (1.9.6), se tem:

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-mx} \quad (1.9.7)$$

ou ainda

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \theta = e^{-mx} \quad (1.9.8)$$

onde θ é uma temperatura adimensional expressada como uma fração da temperatura na base da barra ϑ_1

A figura ao lado mostra a dependência do adimensional de temperatura θ em função do comprimento da barra para diferentes valores de m ($m_1 > m_2 > m_3$); da equação

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_f}{k} \cdot \frac{P}{A}}$$

deduz-se que m é proporcional a razão do calor removido da superfície e inversamente proporcional a $\sqrt{k \cdot A}$, isto é, o fator determinante da transferência de calor por condução ao longo da barra. Conseqüentemente, as aletas devem ser feitas de um material de alta condutividade térmica, que gera um baixo valor para m e preservará grande o excesso de temperatura ao longo da barra.

Quando a razão $\frac{\alpha_f}{k}$ é constante, m decresce com o decréscimo de $\frac{P}{A}$. Isso indica que as aletas mais efetivas

são aquelas que têm uma pequena razão $\frac{P}{A}$ para uma dada seção transversal A .

A quantidade de calor retirada de uma barra para o meio ambiente será aparentemente igual ao calor que passa pela sua base.

O fluxo de calor que passa na base da barra é:

$$Q = -k \cdot A \cdot \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} [W] \quad (1.9.9)$$

da equação (1.9.7) se acha



$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = -me^{-mx}\vartheta_1 \Big|_{x=0} = -m\vartheta_1 \quad (1.9.10)$$

Substituindo o gradiente da temperatura para $x = 0$ na equação (1.9.11) de fluxo de calor, obtemos a quantidade de calor cedido para, ou removido da barra para o seu meio ambiente é:

$$Q - kA.m\vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_f \cdot k \cdot P \cdot A} \quad (1.9.12)$$

1.9.3 Barra Finita

A equação diferencial (1.9.5)

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = m^2 \cdot \vartheta \therefore m = \sqrt{\frac{\alpha_f \cdot P}{k \cdot A}}$$

e sua solução (1.9.6):

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

também são válidas para barra finita, mas as condições de contorno são diferentes:

$$\text{para } x = 0 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_1 \text{ e para } x = L \Rightarrow -k \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=L} = \alpha_L \vartheta_L$$

onde

ϑ_L = temperatura para o fim da barra, e

α_L = Coeficiente de calor no fim da barra.

Quando $x = L$, a quantidade de calor cedida para a extremidade da barra por condução é igual à quantidade desprendida nesta extremidade para o meio.

As constantes, C_1 e C_2 , na equação (1.9.6) são determinadas pela aplicação das condições de contorno vistas acima:

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = C_1 + C_2$$

$$\text{Para } x = L \Rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=L} = C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = -\frac{\alpha_L}{k} \vartheta_L$$



Logo $\vartheta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$

Desta forma podemos determinar C_1 e C_2 :

$$C_1 = \frac{\vartheta_1 \left(m - \frac{\alpha_L}{k} \right)}{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right) + \left(m - \frac{\alpha_L}{k} \right)}$$

$$C_2 = \frac{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right)}{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right) + \left(m - \frac{\alpha_L}{k} \right)}$$

Substituindo C_1 e C_2 na equação (1.9.6) obtemos:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left\{ \frac{e^{2mx} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right)}{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right) + \left(m - \frac{\alpha_L}{k} \right)} + \frac{e^{-mx} e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right)}{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{k} \right) + \left(m - \frac{\alpha_L}{k} \right)} \right\} \quad (1.9.13)$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação acima por $m e^{-mL}$ e fazendo simples transformações algébricas, encontramos:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left\{ \frac{m \left[e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)} \right] + \frac{\alpha_L}{k} \left[e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)} \right]}{m \left[e^{mL} + e^{-mL} \right] + \frac{\alpha_L}{k} \left[e^{mL} - e^{-mL} \right]} \right\} \quad (1.9.14)$$

Relembrando que:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

A equação precedente (1.9.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vartheta = \vartheta_1 \left\{ \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{\alpha_L}{mk} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{\alpha_L}{mk} \sinh(mL)} \right\} \quad (1.9.15)$$

Quando a perda de calor na extremidade da barra puder ser desprezada, as condições de contorno serão:



$$\begin{aligned} \text{Em } x = 0 &\Rightarrow \vartheta = \vartheta_1 \\ \text{Em } x = L &\Rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, consideramos também que para este caso α_L é muito pequeno na extremidade da barra, e a condutividade térmica do material muito grande, logo a razão $\frac{\alpha_L}{k} \rightarrow 0$, isto é, a parede de calor na extremidade da barra pode ser negligenciada.

Com estas condições de contorno os segundos termos tanto do numerador como do denominador da equação (1.9.15) serão anulados, e a nova forma de apresentação da equação será:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad (1.9.16)$$

As equações (1.9.15) e (1.9.16) podem ser usadas para calcular temperatura em qualquer seção transversal da barra. A fração de calor pedido na extremidade da barra é usualmente pequena comparada com a quantidade de calor perdida pela superfície da aleta, e assim a fórmula (1.9.16) pode ser usualmente, usada para todos os cálculos de engenharia.

No caso extremo, quando $x = L$, a fórmula (1.9.16) adquire a seguinte forma:

$$\vartheta_{x=L} = \frac{\vartheta_1}{\cosh(mL)} \quad (1.9.17)$$

A quantidade de calor Q despreendida para o meio ambiente pela superfície de uma aleta é igual à quantidade de calor cedido para sua base:

$$Q_f = -k.A. \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Derivando a equação (1.9.16) e fazendo $x = 0$ temos:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = -\vartheta_1 m \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} = -\vartheta_1 \tanh(mL) \quad (1.9.18)$$

então

$$Q = -kA\vartheta_1 m \cdot \tanh(mL) \quad (1.9.19)$$

Substituindo $m = \sqrt{\frac{\alpha_f P}{k.A}}$ na equação acima, se tem:



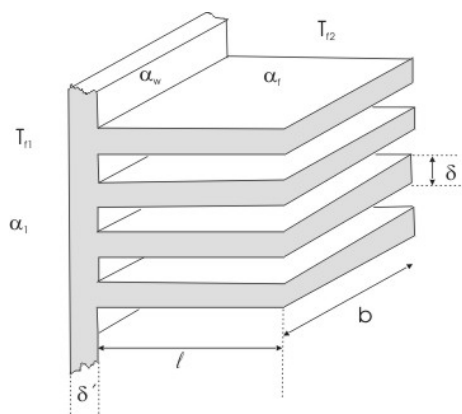
$$Q = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_f P k A} \tanh(mL) \quad (1.9.20)$$

1.10 Transmissão de Calor Através da Parede Plana Aletada

O problema é achar a razão de fluxo de calor através de uma parede aletada de área infinita, com aletas colocadas no lado de menor coeficiente de transmissão de calor.

Os valores dos coeficientes de transmissão de calor são conhecidos, sendo α_1 para o lado sem aletas, α_w para o lado aletado e α_f na superfície das aletas. As dimensões das aletas e as temperaturas dos fluidos são os indicados na figura ao lado.

Desde que a largura de uma aleta seja maior que sua espessura $b \gg \delta$ considerar-se-á que o perímetro de uma seção transversal da aleta $P = 2b$, e a área da seção transversal de uma aleta será $A_t = b\delta$.



Consequentemente:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_f P}{k A}} = \sqrt{\frac{\alpha_f 2b}{k b \delta}} = \sqrt{\frac{2\alpha_f}{k \delta}} \left[\frac{1}{m} \right]$$

Substituindo este valor na equação (1.9.19) do item anterior e multiplicando e dividindo por $2L$, achamos:

$$Q_f = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_f \cdot 2b k b \delta} \frac{2L}{2L} \tanh\left(\frac{L}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_f \delta}{k}}\right)$$

(1.10.1)

ou

$$Q_f = \alpha_f \vartheta_1 A_f \frac{\tanh\left(\frac{L}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_f \delta}{k}}\right)}{\frac{L}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_f \delta}{k}}} \quad (1.10.2)$$

Onde, $\frac{\alpha_f \delta}{k} = Bi$, é o grupo adimensional conhecido como ‘número de Biot’, que é uma importante característica do processo de condução de calor. O número de Biot representa a razão entre a resistência térmica interna para condução e a resistência térmica para transferência de calor:



$$Bi = \frac{\frac{\delta}{k}}{\frac{1}{\alpha_f}}$$

A equação para fluxo de calor para a superfície de uma aleta pode ser escrita como:

$$Q_f = \alpha_f \vartheta_1 A_f \frac{\tanh\left(\frac{L}{\delta} \sqrt{2Bi}\right)}{\frac{L}{\delta} \sqrt{2Bi}} \quad (1.10.3)$$

com $\vartheta = T - T_f$, onde T_f = temperatura do meio e T = temperatura da barra.

Se fizermos $\frac{\tanh\left(\frac{L}{\delta} \sqrt{2Bi}\right)}{\frac{L}{\delta} \sqrt{2Bi}} = E$ = a eficiência da aleta, a equação acima adquire a seguinte forma:

$$Q_f = \alpha_f \vartheta_1 A_f E \quad (1.10.4)$$

onde a área aleta é $A_f = 2Lb$.

A eficiência da aleta $E = f\left(\frac{L}{\delta} \sqrt{2Bi}\right)$ tende para um máximo da unidade quando $\frac{L}{b} \sqrt{2Bi} \rightarrow 0$ (para uma dada dimensão de aleta, isto é possível quando $Bi \rightarrow 0$)

A quantidade de calor Q_w em [W] ou [kcal/h] removida da superfície plana entre as aletas á:

$$Q_w = \alpha_w \vartheta_1 A_w \quad (1.10.5)$$

e a quantidade total de calor é:

$$Q = Q_f + Q_w = \alpha_f \vartheta_1 A_f E + \alpha_w \vartheta_1 A_w \quad (1.10.6)$$

ou ainda

$$Q = \alpha_{red} \vartheta_1 A_{f_w} \therefore A_{f_w} = A_f + A_w \quad (1.10.7)$$

Comparando (1.10.7) com (1.10.6) vê-se que



$$\alpha_{red} = \alpha_f E \frac{A_f}{A_{fw}} + \alpha_w \frac{A_w}{A_{fw}} \quad (1.10.8)$$

O valor α_{red} é chamado de “coeficiente de transferência de calor reduzido” e é um coeficiente médio de transferência de calor para uma parede aletada.

O processo de transferência de calor através da parede aletada pode ser descrito pelo conjunto de fórmulas abaixo:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_1 A_1 (T_{f1} - T_{w1}) \\ Q &= \frac{\lambda}{\delta'} (T_{w1} - T_{w2}) A_1 \\ Q &= \alpha_{red} (T_{w2} - T_{f2}) A_{fw} \end{aligned}$$

onde δ' é a espessura da parede onde estão as aletas.

Das equações acima, obtém-se:

$$Q = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 A_1} + \frac{\delta' A_{fw}}{k A_1} + \frac{1}{\alpha_{red} A_{fw}}} \quad (1.10.9)$$

com A_1 = área da parede não aletada. Se fizermos a relação do fluxo de calor por unidade de área da superfície da parede aletada, se tem:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{A_{fw}} = q_{fw} &= \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{A_{fw}}{A_1} + \frac{\delta'}{k} \frac{A_{fw}}{A_1} + \frac{1}{\alpha_{red}}} \\ q_{fw} &= \alpha_{fw} (T_{f1} - T_{f2}) \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_{fw} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{A_{fw}}{A_1} + \frac{\delta'}{k} \frac{A_{fw}}{A_1} + \frac{1}{\alpha_{red}}}$$

é o coeficiente global de transferência de calor ou coeficiente global de película para paredes aletadas.

Se fizermos agora a relação entre o fluxo de calor para a área de superfície não aletada da parede se tem:



$$\frac{Q}{A_1} = q_1 = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta'}{k} + \frac{1}{\alpha_{red}} \frac{A_1}{A_{fw}}} \quad (1.10.10)$$

$$q_1 = \alpha_{nf} (T_{f1} - T_{f2})$$

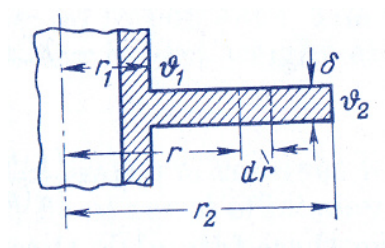
onde

$$\alpha_{nf} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta'}{k} + \frac{1}{\alpha_{red}} \frac{A_1}{A_{fw}}} \quad (1.10.11)$$

é o coeficiente global de transferência de calor para o fluxo de calor submetido á superfície da parede não aletada.

A razão da superfície aletada, A_{fw} , para a superfície não aletada A_1 , é chamado de “fator de aletamento”.

1.11 Transferência de Calor Através de Aletas Circulares de Espessura Constante.



O cálculo das aletas com seção transversal variável é mais complicado que o de aletas retas de espessura constante. Consideremos o caso da transferência de calor através de uma aleta circular de espessura constante (figura ao lado), como as empregadas para ampliar as superfícies cilíndricas dos tubos.

Os dados conhecidos da aleta incluem seu raio interno r_1 , seu raio externo r_2 , espessura δ e sua condutividade térmica k .

A temperatura ambiente T_f é constante. O excesso de temperatura na aleta é

$$\vartheta = T - T_f$$

O coeficiente de transferência de calor α para toda a superfície da aleta, e a temperatura ϑ_1 para sua base são conhecidos.

O processo é estacionário com temperatura variando apenas ao longo da altura da aleta. Dessas condições, nós podemos achar a equação diferencial que descreve a condução de calor através da aleta. Primeiramente façamos o balanceamento térmico para um elemento da aleta dr :



$$Q_r - Q_{r+dr} = dQ$$

Achando os termos da equação acima, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\alpha}{k\delta} \vartheta = Q$$

Denotando $m^2 = \frac{2\alpha}{k\delta}$; $mr = z$ e $\frac{1}{r} = \frac{m}{z}$

e substituindo $\frac{d\vartheta}{dr} = m \frac{d\vartheta}{dz}$ e $\frac{d^2\vartheta}{dr^2} = m^2 \frac{d^2\vartheta}{dz^2}$, a equação diferencial acima toma a seguinte forma:

$$m^2 \frac{d^2\vartheta}{dz^2} + m \frac{d\vartheta}{dz} - (m^2)\vartheta = 0 \tag{1.11.1}$$

Esta equação é a equação de Bessel, cuja solução geral é:

$$\vartheta = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z) \tag{1.11.2}$$

onde

$I_0(z) = I_0(mr)$ = função modificada de Bessel⁴ de 1ª espécie e de argumento imaginário de ordem zero.

$K_0(z) = K_0(mr)$ = função modificada de Bessel de 2ª espécie e argumento imaginário de ordem zero.

Estas funções têm as seguintes propriedades:

$$\text{Para } r = 0 \rightarrow \begin{cases} I_0(mr) = 1 \\ K_0(mr) \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{Para } r \rightarrow \infty \mapsto \begin{cases} I_0(mr) \rightarrow \infty \\ K_0(mr) = 0 \end{cases}$$

⁴ Funções de Bessel modificadas são soluções da equação diferencial ordinária do tipo $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0$. Essas funções conhecidas como funções Bessel modificadas de primeira espécie e de segunda espécie de ordem ν , respectivamente

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m+\nu+1)} \text{ e } K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]. \text{ Pode-se mostrar que } I_\nu(x) \text{ é real}$$

para todo x e ν real, $I_\nu(x) \neq 0$ para todo real $x \neq 0$ e $I_{-n}(x) = I_n(x)$ para qualquer n inteiro.



As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno.

Se o calor perdido pelas pontas da aleta circular pode ser desprezado a fórmula de cálculo assume uma das seguintes formas:

para temperatura corrente ao longo da aleta

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)} \quad (1.11.3)$$

da temperatura para a ponta da aleta

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(mr_2)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}$$

para quantidade de calor

$$Q = -k.2\pi r_1 \delta \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_1} = 2\pi r_1 \alpha \delta m \vartheta_1 \psi \quad (1.11.4)$$

onde

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(mr_2)K_1(mr_1) + I_1(mr_1)K_0(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)} \quad (1.11.5)$$

As normas obtidas acima são incômodas e inconvenientes para cálculos de engenharia. Aletas circulares de espessura constante e varias aletas retas de seção transversal variável, entretanto, são tratadas e calculadas como aletas retas de seção transversal constantes. Assim, a quantidade de calor perdida pela superfície de uma aleta circular de espessura constante é:

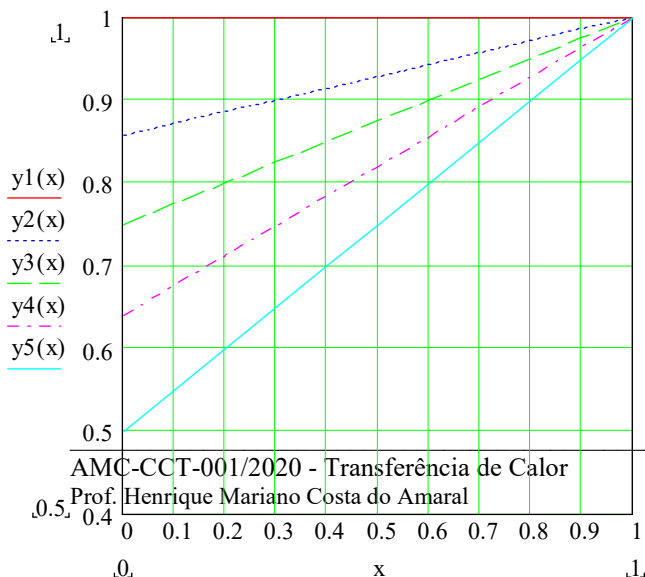
$$Q' = \varepsilon' A' q$$

onde

Q' = quantidade de calor pedido pela aleta circular em [W] ou [kcal/h]

A' = área da aleta circular [m²]

q = quantidade de calor perdida por unidade de tempo por unidade de área de uma aleta reta de espessura igual a de aleta circular e de 1 metro de comprimento.





$\varepsilon' = f\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \frac{r_2}{r_1}\right)$ = fator de correção determinado pelo gráfico abaixo.

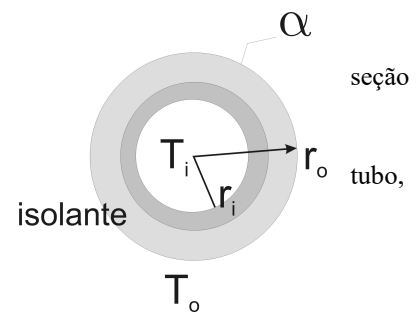
Aqui o eixo dos x é $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ que é a razão entre as temperaturas da base e da ponta da aleta, calculado pela fórmula derivada de uma aleta reta de seção transversal constante.

Assim, para calcular a temperatura para a ponta da aleta e a taxa de fluxo de calor para uma aleta reta e substituindo q e ε' na equação: $Q' = \varepsilon' A' q$.

pode-se obter o fluxo de calor para uma aleta circular. As curvas denominadas y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 representam respectivamente as curvas referentes a $\frac{r_2}{r_1} = 1.0, \frac{r_2}{r_1} = 1.5, \frac{r_2}{r_1} = 2.0, \frac{r_2}{r_1} = 3.0$ e $\frac{r_2}{r_1} = 4.0$. O eixo y representa o valor de ε' .

1.12 Espessura Crítica de Isolamentos.

O cálculo da espessura crítica de um material isolador num tubo com transversal constante pode ser regido por uma equação similar a (1.7.6), considerando que o tubo tenha comprimento L , que r_i =raio interno do r_o =raio externo do material isolante:



$$Q = \frac{T_{fi} - T_{fo}}{\left(\frac{1}{2\pi L r_i \alpha_i} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi L k_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \frac{1}{2\pi L r_o \alpha_2} \right)} = q \cdot A(r) \quad (1.12.1)$$

e sendo T_{fi} e T_{fo} respectivamente as temperaturas na face interna do tubo e na face externa da camada mais externa de isolamento, conforme mostra a figura anterior. Em nosso caso, se tem 2 camadas apenas, isto é, o tubo e o revestimento isolante. Assim, desprezando a resistência do tubo, a equação se torna:

$$Q = \frac{2\pi L (T_{fi} - T_{fo})}{\left(\frac{1}{k_i} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{r_o \alpha} \right)} \quad (1.12.2)$$

É evidente que o isolante é ótimo se não houver fluxo de calor para o exterior, isto é, $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$, logo:



$$\frac{\partial Q}{\partial r_o} = \frac{-2\pi L(T_{fi} - T_{fo})}{\left[\frac{1}{\alpha r_o} + \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \right]} \left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{\alpha r^2} \right) = 0 \quad (1.12.3)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{\alpha r^2} \right) = 0$$

Desta última equação se pode tirar o raio r_o crítico, isto é:

$$\left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{\alpha r_o^2} \right) = 0 \Rightarrow r_{o_{\text{critico}}} = \frac{k}{\alpha} \quad (1.12.4)$$

que produz uma derivada segunda negativa, isto é, $\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} < 0$, que demonstra que Q é máximo para $r_{o_{\text{critico}}}$.



Problemas Sobre Condução de Calor

1 – As paredes de uma câmara frigorífica são constituídas de uma placa de cortiça de 10 cm de espessura, comprimento entre duas placas de madeira de 1,3 cm de espessura. Calcule o fluxo de calor em kcal/h.m² se a superfície interna estiver a –20 °C e a superfície externa a 30 °C. Calcule também a temperatura das interfaces entre as placas de madeira e a cortiça.

Dados: condutividade térmica da cortiça = 0,0336 kcal /m.h.°C

Condutividade térmica da madeira: = 0,092 kcal /m.h.°C

2 – Um tubo de aço de 6 polegadas está recoberto de uma camada de 10 cm de isolante. A temperatura da superfície interna do tubo é de 280 °C e a temperatura da superfície externa do isolante é 42 °C. Calcule a perda de calor por metro de tubo e a temperatura na interface tubo-isolante.

Dados: condutividade térmica do aço = 38,6 kcal /m.h.°C

Condutividade térmica do isolante = 0,0566 kcal /m.h. °C

Diâmetro externo do tubo = 16,83 cm

Diâmetro interno do tubo = 14,65 cm

3 – Uma fornalha deve ser construída com uma camada interna de tijolos refratários (condutividade térmica = 1,27 kcal /m.h.°C). Esta camada deve ser revestida de uma camada de tijolos isolantes (condutividade térmica = 0,134 kcal/m.h. °C) com 22 cm de espessura, revestida, por sua vez, por uma camada de 15 cm de tijolos de construção (condutividade térmica = 0,75 kcal/m.h. °C). O interior da fornalha deve operar a 1200 °C e o exterior a 60 °C. Determine a espessura da camada de tijolo refratário necessário para que o tijolo isolante não ultrapasse 920 °C. Calcule a temperatura da face do tijolo de construção.

4 – Um aquecedor de ar tubular cujo rendimento é de 2,78 kg de ar por segundo, é fabricado com tubos de diâmetro $d_1/d_2 = 43/49$ mm. O coeficiente de condutibilidade térmica do material dos tubos é 50 W/m. °C. Pelo interior dos tubos circula gás aquecido, enquanto que a superfície externa dos tubos está banhada por um fluxo transversal de ar. A temperatura média dos gases de combustão é $T_{f_1} = 250$ °C e a temperatura média do ar que se aquece é de $T_{f_2} = 145$ °C. A diferença de temperatura do ar na entrada e na saída do aquecedor é 250 °C. O coeficiente da película dos gases para a parede é 45 W/m². °C e da parede para o ar é 25W/m². °C.

Calcular o coeficiente de transmissão de calor e determinar a superfície de trocas de calor. O cálculo deve ser efetuado segundo as fórmulas para paredes: a) cilíndrica B) plana. Comparar os resultados dos cálculos.

5 – Achar a quantidade de calor transferida através de uma aleta de espessura igual a 5 mm, altura $h = 50$ mm e o comprimento $L = 1,0$ m; determine também a diferença de temperatura no topo da aleta se o coeficiente de condutividade térmica do material é 50 kcal /m.h.°C, os coeficientes de películas interno e externo iguais a 10 kcal /m².h.°C (ambos) e $\theta_1 = 80$ °C.



6 – O calor gerado por uma esfera de 5(cinco) cm de diâmetro, de material radiativo é 28,7 kcal/h. Se a encapsularmos em uma esfera de material isolante (condutividade térmica = 0,15 kcal /m.h.°C), com diâmetro de 60 cm, qual será a temperatura da esfera de material radioativo? A temperatura da face externa do isolamento é de 38 °C.

Admita a esfera radioativa com temperatura uniforme.

7 – Um aparelho aquecedor é fabricado em forma de um tubo vertical com aletas longitudinais de aço cuja seção é retangular. A altura do tubo é $h = 1200$ mm, seu diâmetro exterior é $d_2 = 60$ mm; o comprimento das aletas é $l = 50$ mm e a espessura destas são de 3 mm. A quantidade de aletas é igual a $n = 20$. A temperatura na base das aletas é $T_o = 80$ °C; a temperatura ambiente é de $T_f = 18$ °C. O coeficiente de película das aletas e da superfície exterior dos tubos para o ambiente é de 9,3 W/m².°C; o coeficiente de condutibilidade térmica é de 55,7 W/m.°C para a parede. Calcular a quantidade de calor que a parede aletada transmite para o meio ambiente.

8 – O elemento combustível proposto para um reator nuclear de potencia consiste em um núcleo cilíndrico de combustível, de 5 cm de diâmetro, envolto por uma camada de 0,6 cm de alumínio. A face externa do alumínio estará em contato com o fluido transportador de calor, que manterá esta superfície a 95 °C. O núcleo combustível fornece um fluxo de calor de $5,2 \times 10^8$ kcal/h.m³. Devido ao efeito adverso da temperatura sobre o alumínio, a temperatura do revestimento não poderá exceder a 430°C em qualquer ponto. Perguntamos: este projeto é satisfatório?

Dado: condutividade térmica do alumínio é $k(1 + b \times t)$, onde:

$k = 176$ kcal /m.h. °C e $b = 8,9$ (°C)⁻¹ na faixa de 90 a 450 °C.

9 – Uma tubulação de aço tem comprimento de 100 metros. Internamente circula vapor d'água a 300°C. O meio ambiente onde esta tubulação está mergulhada está a 40°C. Calcule a perda de calor em toda a tubulação, por unidade de tempo, Posteriormente considere o coeficiente de película e refaça os cálculos e compare-os com os cálculos anteriormente.

Dados. Condutividade térmica do aço 50 kcal / m.h. °C

Coeficiente interno de película* = 106 kcal /m².h.°C

Coeficiente de película externa = 8 kcal /m².h.°C.

10 – Qual o fluxo de calor existente entre dois meios ambientes, estando o primeiro a 60°C e o outro a 8°C, se estes estão separados por uma parede de tijolos comuns, cuja condutividade térmica é de 0,75 kcal /m.h.°C.

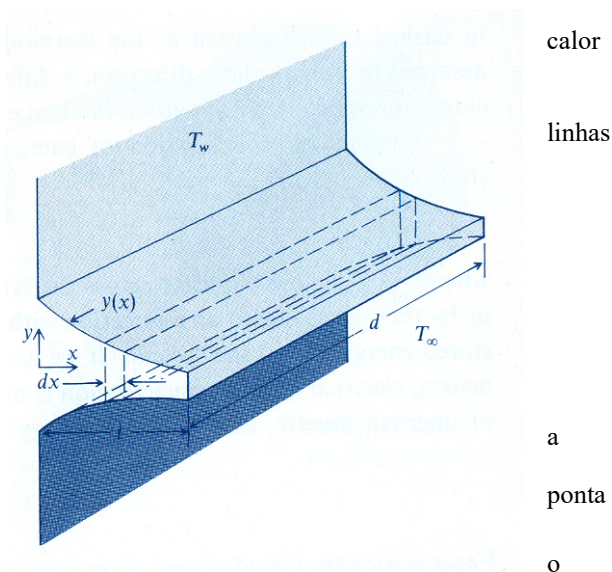


1.13 Condução de Calor Através de Aletas Retas com Espessura Variável

Os processos de aquecimento e resfriamento por convecção forçada são em geral acompanhados de equipamentos nos quais existem aletas, permitindo uma otimização da troca de calor. O problema associado a isso é aquele que procura estabelecer um perfil da aleta com o menor peso possível para uma dada taxa de transferência de calor.

Considerando que todas as seções da aleta tenham a mesma eficiência⁵, isto é, que a taxa específica de fluxo de calor permaneça constante sobre todas as seções transversais. Isto significa que as linhas de fluxo de calor precisam ser paralelas ao eixo da aleta. Sob esta condição, a distribuição de temperatura ao longo das linhas de fluxo de calor será linear.

Seja a seção transversal definida como uma função $f_1(x)$, e com um perfil limitado por uma função $y(x) = \pm f(x) \therefore x \in [0; l]$. Seja um comprimento $d = 1$. Com a temperatura na base igual $T_w = T(x = 0)$ conhecida e com a temperatura na ponta da aleta igual à temperatura ambiente $T_f = T(x = l)$



o problema se torna unidimensional; assim se pode escrever para qualquer seção da aleta a seguinte relação:

$$T - T_f = \frac{x}{l}(T_w - T_f) \text{ sendo } l \text{ o tamanho da aleta. A seção transversal, portanto, será } A(x) = 2 \cdot f(x) \cdot d = 2 \cdot f(x).$$

Pela 1ª Lei da Termodinâmica, se tem:

Taxa de energia que entra	+	Taxa de energia gerada	=	Taxa de energia que sai	+	Taxa de energia armazenada
---------------------------	---	------------------------	---	-------------------------	---	----------------------------

A eficiência de uma aleta é definida pela relação

$$\eta_a = \frac{\text{transferencia de calor efetivamente ocorrida}}{\text{Calor transferido quando a aleta inteira tem a temperatura da base } T_w}$$



Considerando, neste caso, nulas as taxas de energia gerada e de energia armazenada e mais que a taxa de energia que sai do mesmo elemento de volume $A(x)dx$ seja igual a energia que sai em $x + dx$ por condução ($q_{x|x+dx}$) e por convecção pelas bordas do elemento (q_α), se tem:

$$q_{x|x} - q_{x|x+dx} - q_\alpha = 0 \therefore q_\alpha = 2dx \cdot \alpha (T - T_f) \quad (1.13.1)$$

sendo α o coeficiente de transmissão de calor por convecção do meio em que está a aleta. O excesso na temperatura da aleta além da temperatura de referencia (T_f) será denotado por $\vartheta : \vartheta = T - T_f$, onde T_f = temperatura do meio e T = temperatura da barra a uma distancia x da parede. Assim, para uma dada temperatura T_w , na base da barra, o excesso de temperatura na base será: $\vartheta = T_w - T_f$. Assim considerando e levando a expressão (1.13.1) ao limite quando $dx \rightarrow 0$ se tem:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} (q_{x|x} - q_{x|x+dx} - 2dx \cdot \alpha \vartheta) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(q_x) - 2\alpha \vartheta = 0$$

mas pela Lei de Fourier, se tem que $q_x = -k \cdot A(x) \frac{d\vartheta}{dx} = -k \cdot 2f(x) \frac{d\vartheta}{dx}$, logo substituindo esse resultado na expressão anterior, se tem

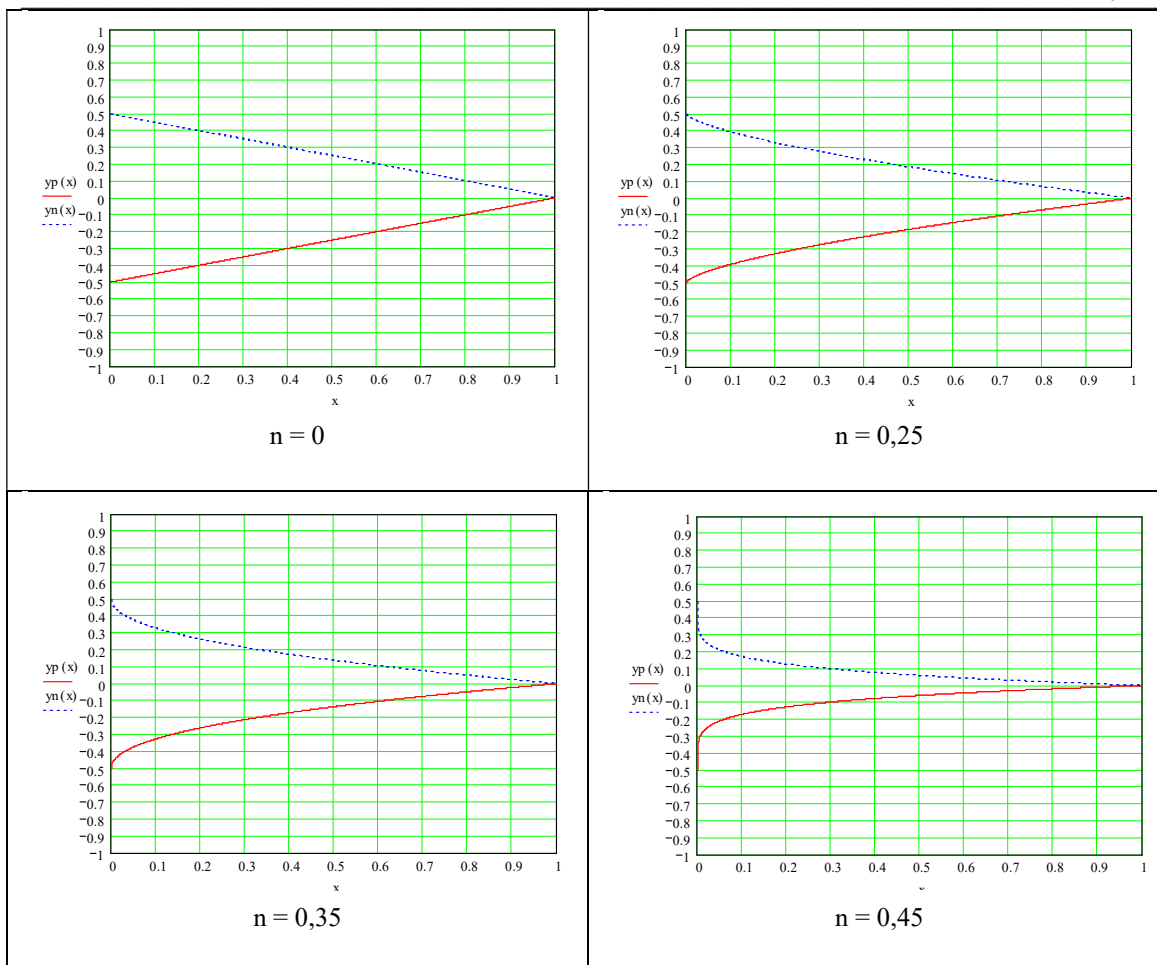
$$2k \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{d\vartheta}{dx} \right) - 2\alpha \vartheta = 0 \quad (1.13.2)$$

$$f(x) \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\alpha \vartheta}{k} = 0 \quad (1.13.3)$$

Esta é a expressão geral para uma aleta cuja superfície é definida pela função $y(x) = \pm f(x)$. Em geral, para aletas longitudinais, usualmente se tem:

$$f(x) = \frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{(1-2n)}{(1-n)}} - \lambda \quad (1.13.4)$$

onde δ é a espessura máxima da aleta em sua base e l o seu comprimento transversal. Por exemplo, na fórmula (1.13.4) se $\lambda = \delta/2$, se tem que em $x = l \Rightarrow f(l) = 0$. A seguir se apresentam os gráficos para $n = 0$, $n = 0.25$, $n = 0.35$ e $n = 0.45$.

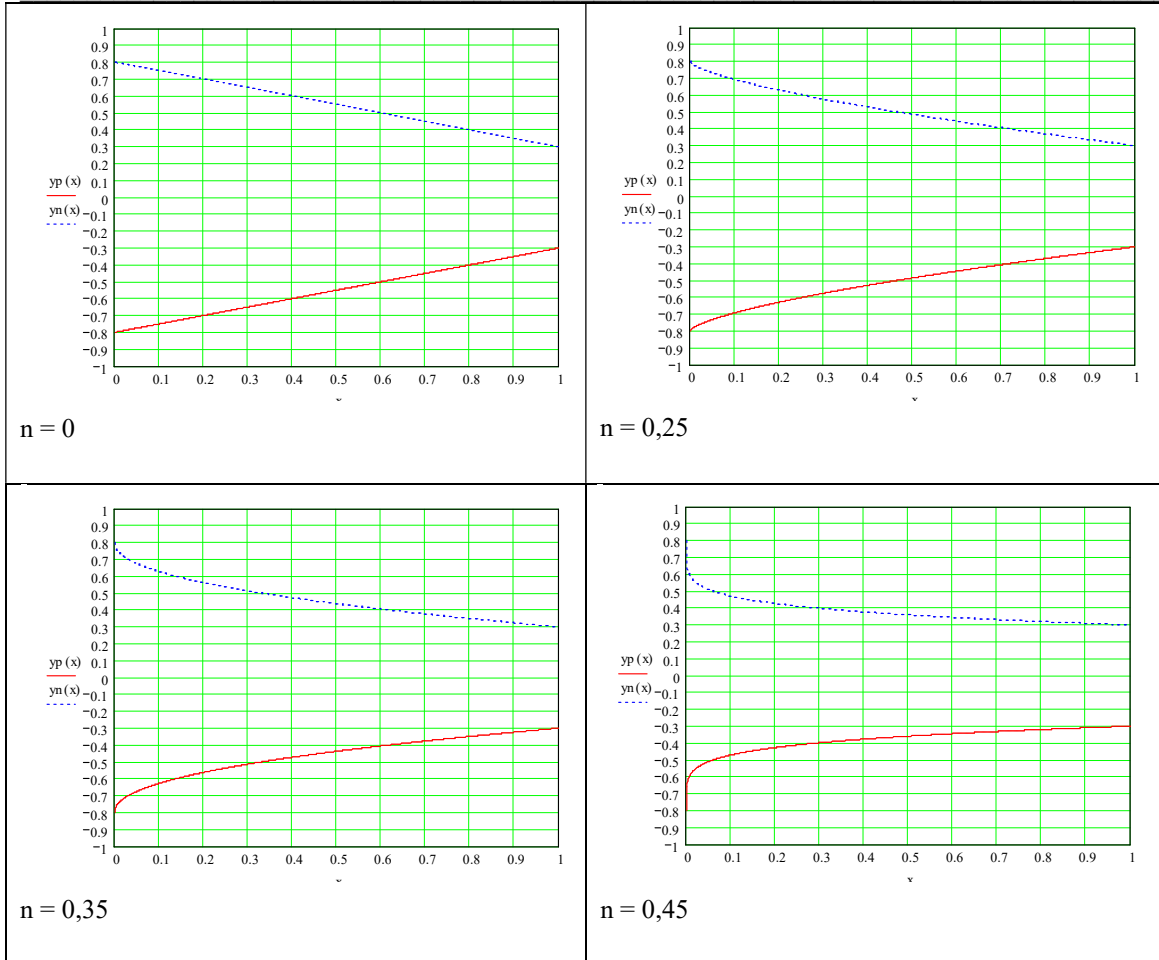


Se em (1.13.4) se tiver, por exemplo, $\lambda = \frac{\delta}{1,25}$, com $\delta = 1$, que representa que em:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{\delta}{1,25} = 0,8$$

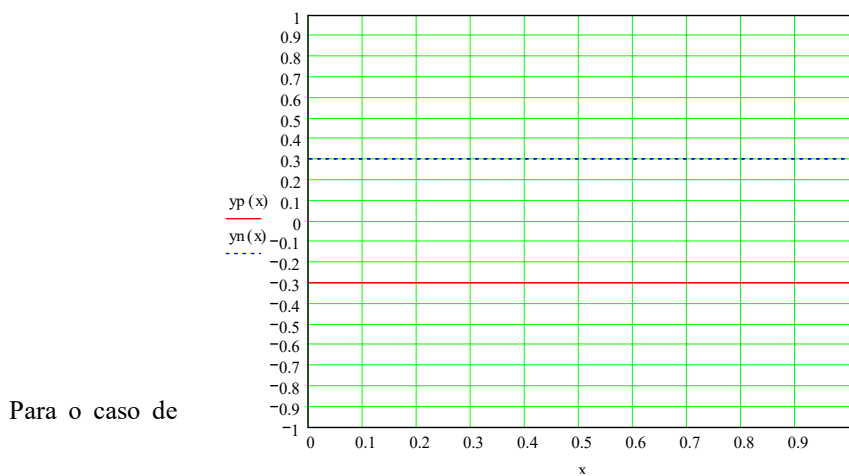
$$x = l \Rightarrow f(l) = \frac{\delta}{1,25} - \frac{\delta}{2} = 0,8 - 0,5 = 0,3$$

teremos os seguintes gráficos para os mesmos n indicados acima, ou seja $n = 0$, $n = 0.25$, $n = 0.35$ e $n = 0.45$ respectivamente:



1.13.1 Aleta de Perfil Retangular

Em especial, quando $n = 0,5$, ter-se-á uma aleta retangular de altura igual a 0.3, cujo gráfico da função é:





$\lambda = \frac{\delta}{1,25} = \frac{1}{1,25} = 0,8$ e $n = 0$ se tem uma aleta trapezoidal. Aplicando a equação (1.13.3) para a função

(1.13.4) com os dados citados se tem:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} - \lambda \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{1}{2} \\ \rightarrow \left(\frac{x}{2} - \lambda\right) \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\alpha}{k} \vartheta &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo $z' = \frac{x}{2} - \delta$, se tem:

$$z' \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z'^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{d\vartheta}{dz'} - \frac{2\alpha}{k} \vartheta = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z'^2} + \frac{1}{z'} \frac{d\vartheta}{dz'} - \frac{2\alpha}{kz'} \vartheta = 0 \quad (1.13.5)$$

Fazendo novamente uma mudança de variável, $z = \frac{kz'}{2\alpha}$ se tem a equação diferencial da aleta:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \frac{1}{z} \vartheta = 0 \quad (1.13.6)$$

que é uma equação diferencial de Bessel modificada, cuja solução é

$$\vartheta = C_1 I_0(2\sqrt{z}) + C_2 K_0(2\sqrt{z}) \quad (1.13.7)$$

onde I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas. As constantes da equação (1.13.7) acima são determinadas pelas condições de contorno, que são:

$$x = 0 \rightarrow \vartheta = \vartheta_0$$

e, desprezando a dissipação de calor na ponta da aleta, se tem

$$x = l \rightarrow \vartheta = \vartheta_l \wedge \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=l} = 0$$

Assim fazendo, obtém-se a temperatura ao longo da aleta:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{I_0(2\sqrt{z}) K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l}) K_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_0}) K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l}) K_0(2\sqrt{z_0})} \quad (1.13.8)$$



sendo que a temperatura na borda da aleta (quando $x = l$) será

$$\vartheta_l = \vartheta_0 \frac{I_0(2\sqrt{z_l})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_l})}{I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_0})} \quad (1.13.9)$$

O fluxo de calor pode ser determinado pela Lei de Fourier

$$q = -kA(x) \frac{d\vartheta}{dx} \Big|_{x=0} = -kA(x) \left[\frac{\vartheta_0}{\sqrt{z_0}} \frac{I_1(2\sqrt{z})K_1(2\sqrt{z_l}) - I_1(2\sqrt{z_l})K_1(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_0})} \right]$$

onde $A(x_0) = 2f(x=0)d = \delta d$ com d o comprimento longitudinal da aleta e δ a altura da aleta na base ou em $x = 0$.

1.13.2 Aleta de Perfil Triangular

No caso de um perfil triangular, $n = 0$, logo se tem:

$$f(x) = \frac{\delta x}{2l} - \lambda$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\delta}{2 \cdot l}$$

Levando os resultados acima na equação (1.13.3) se tem:

$$\left(\frac{\delta x}{2l} - \lambda \right) \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\delta}{2 \cdot l} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\alpha}{k} \vartheta = 0$$

Fazendo $z' = \frac{\delta x}{2l} - \lambda$, se tem:

$$z' \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z'^2} \right) + \left(\frac{2l}{\delta} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial z'} - \frac{\delta^2}{4l^2} \frac{\alpha}{k} \vartheta = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z'^2} \right) + \left(\frac{2l}{\delta} \right) \frac{1}{z'} \frac{\partial \vartheta}{\partial z'} - \frac{\delta^2}{4l^2 z'} \frac{\alpha}{k} \vartheta = 0 \quad (1.13.10)$$

Fazendo novamente uma mudança de variável, $z = \frac{4l^2 z' k}{\delta^2 \alpha}$ se tem a equação diferencial da aleta:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} + \left(\frac{\delta}{2l} \right) \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \frac{1}{z} \vartheta = 0 \quad (1.13.11)$$



que é uma equação diferencial de Bessel modificada, cuja solução é

$$\mathfrak{G} = C_1 I_0(2\sqrt{z}) + C_2 K_0(2\sqrt{z}) \quad (1.13.12)$$

onde I_0 e K_0 são funções de Bessel modificadas. As constantes da equação (1.13.7) acima são determinadas pelas condições de contorno, que são:

$$x = 0 \rightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0$$

e, desprezando a dissipação de calor na ponta da aleta, se tem

$$x = l \rightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_l \wedge \left. \frac{d\mathfrak{G}}{dx} \right|_{x=l} = 0$$

Assim fazendo, obtém-se a temperatura ao longo da aleta:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \frac{I_0(2\sqrt{z})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_0})} \quad (1.13.13)$$

sendo que a temperatura na borda da aleta (quando $x = l$) será

$$\mathfrak{G}_l = \mathfrak{G}_0 \frac{I_0(2\sqrt{z_l})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_l})}{I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_0})} \quad (1.13.14)$$

O fluxo de calor pode ser determinado pela Lei de Fourier

$$q = -kA(x) \left. \frac{d\mathfrak{G}}{dx} \right|_{x=0} = -kA(x) \left[\frac{\mathfrak{G}_0}{\sqrt{z_0}} \frac{I_1(2\sqrt{z})K_1(2\sqrt{z_l}) - I_1(2\sqrt{z_l})K_1(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_0})K_1(2\sqrt{z_l}) + I_1(2\sqrt{z_l})K_0(2\sqrt{z_0})} \right]$$

onde $A(x_0) = 2f(x=0)d = \delta d$ com d o comprimento longitudinal da aleta e δ a altura da aleta na base ou em $x = 0$.

1.14 Transferência de Calor por Convecção Forçada em Tubos.

Os processos de aquecimento e resfriamento por convecção forçada são determinados principalmente pelas condições do fluxo. Essas condições são consideradas em extensão na hidrodinâmica. Entretanto, mostrar-se-á a título de recordação, apenas aquelas que são da maior importância ao processo de transferência de calor.



O fluxo forçado é criado por forças externas – bombas e ventiladores. São dois ou mais de fluxo de fluido: laminar e turbulento. O primeiro ocorre para velocidades baixas e o segundo para altas velocidades. A mudança de fluxo laminar ocorre tão logo a velocidade de fluxo atinge sua velocidade crítica.

A velocidade crítica é diferente para diferentes fluidos e tubos.

Reynolds mostrou que quando o fluxo de fluidos em tubos muda de fluxo laminar para turbulento, isso ocorre para certo valor do termo adimensional $\frac{\rho V d}{\mu}$, onde V é velocidade do fluido [m/s], d [m] é um comprimento característico do escoamento, no caso o diâmetro do tubo, ρ é a massa específica ou densidade [kg/m^3], e μ é a viscosidade dinâmica [Ns/m^2] do fluido envolvido. Este termo adimensional é chamado de “número de Reynolds” e é denominado pelo símbolo **Re**. Se $\text{Re} < 2.200$ o fluxo do fluido no tubo está em fluxo laminar, e o padrão do fluxo muda para turbulento quando $\text{Re} > 2.200$. O valor $\text{Re} = 2.200$ é o valor crítico do número de Reynolds. Este último permite a determinação da velocidade crítica para qualquer modo fluxo e qualquer fluido dentro de um tubo de qualquer diâmetro, isto é,

$$V_{\text{critica}} = 2200 \times \frac{\mu}{\rho d} = 2200 \times \frac{\nu}{d} \quad (1.14.1)$$

onde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m^2/s] é a viscosidade cinemática. Esses parâmetros nos fluidos líquidos, μ e ν são altamente dependentes da temperatura do fluido, tendendo a diminuir quando a temperatura aumenta. Já para gases há um aumento com o aumento da temperatura

Existe uma diferença quantitativa entre os fluxos laminar e turbulento. Este envolve leis de governo de mudança de velocidade em toda seção transversal do tubo. Em fluxos laminares, a velocidade muda de acordo com uma lei parabólica:

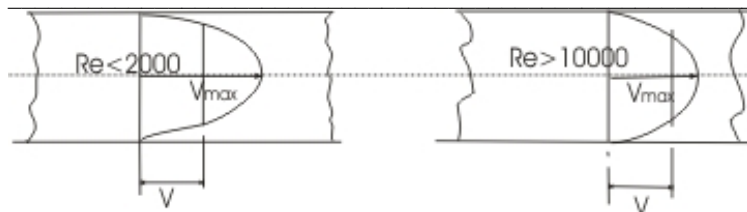
$$V = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^n$$

Onde V_0 = velocidade no eixo do tubo.

V = velocidade de uma distancia r do eixo do tubo.

R = raio do tubo.

A velocidade é máxima no eixo do tubo e zero na parede do tubo.



No fluxo turbulento, a velocidade muda ao longo de uma parábola truncada. A curva muda abruptamente próxima à parede e achata-se por fora no meio do tubo. A máxima velocidade é observada próximo ao eixo do tubo.

Nos cálculos práticos nós procuramos

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int V dA = \frac{\mathcal{V}}{A} [m/s]$$

Onde

\bar{V} = velocidade média [m/s]

\mathcal{V} = volume do fluxo por segundo [m³/s] (vazão)

A = área seccional do tubo [m²]

No fluxo laminar, a razão entre \bar{V} e V_0 é constante e igual a 0,5. No fluxo turbulento, a razão é igual a certo valor C, que é função do Re:

$$\frac{\bar{V}}{V_0} = f(\text{Re})$$

As leis consideradas de distribuição de velocidades na seção transversal de um tubo consideram somente os chamados “fluxos hidrodinamicamente bem desenvolvidos”⁶.

Quando o fluido está em fluxo turbulento dentro do tubo, existe uma camada de fluido próximo à parede do tubo, no qual o fluxo é laminar. Esta é chamada de “camada limite laminar”. A sua espessura cresce ao longo da seção de estabilização de um fluxo bem desenvolvido desde $\delta = 0$ até um máximo de $\delta = 64,2 \frac{d}{\text{Re}^{1/2}}$. A espessura da camada limite diminui com o aumento de Re :

$$\text{Para } \text{Re} = 10^4 \rightarrow \frac{\delta}{d} = \frac{1}{466};$$

⁶ O tamanho da seção ao longo de um fluxo bem desenvolvido será $x = 0,034d \text{ Re}$ para fluxo laminar e $x = 40d$ para fluxo turbulento.



$$\text{Para } Re = 10^5 \rightarrow \frac{\delta}{d} = \frac{1}{3660};$$

$$\text{Para } Re = 10^6 \rightarrow \frac{\delta}{d} = \frac{1}{28400};$$

Os princípios e relações descritas acima se aplicam unicamente a fluxos isotérmicos, quando a temperatura do fluido é constante e igual para todos os pontos. Se ocorrer transferência de calor, o fluxo é dito não isotérmico; a temperatura do fluido muda tanto ao longo do tubo quanto ao longo da seção transversal.

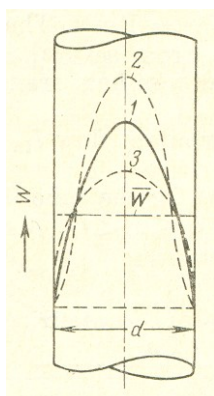
A mudança de temperatura na seção transversal é função da mudança de viscosidade, e esta por sua vez, produz uma variação de velocidade de modelo padrão. Esta variação depende da direção do fluido de calor (fig. abaixo). No caso de um fluido frio, a temperatura para a parede é baixa a velocidade é mais alta que o centro (veja curva 2) que em condições isotérmicas.

Efeito da transferência de calor na distribuição de velocidade na seccar transversal.

1-fluxo isotérmico;

2-resfriamento;

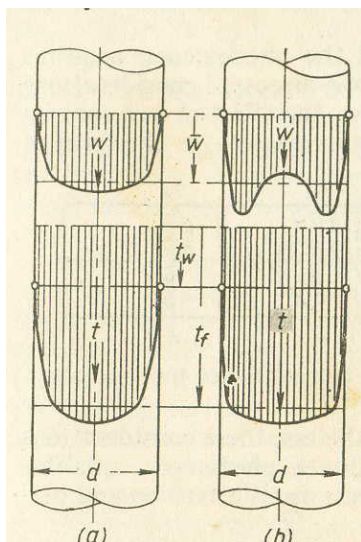
3-aquecimento de líquidos.



No caso de um fluido aquecido, a velocidade de fluxo é maior na parede e menor no centro (uma curva 3).

Então, em condições de fluxo não-isotérmico, isto é quando acontece aquecimento ou resfriamento, a principal lei laminar não é válida distribuição parabólica de velocidade.

Assim, a diferença de temperatura na seção transversal produz uma “força flutuante” e convecção livre ou forçada. Ela também afeta o campo de velocidade do modelo. Se esta é uma convecção não livre, a distribuição de temperatura e velocidade para seção transversal do tubo é a mostrada abaixo.



A lei que governa a distribuição de velocidade muda neste caso para a convecção livre. A natureza desta unidade depende quer o tubo esteja na posição vertical ou horizontal, ou quer as direções no fluxo livre e forçado coincidam.

Em tubo vertical, em que as direções dos fluxos forçado a livre coincidem (no caso do líquido frio deslocar-se para cima e o fluido aquecido transferir-se para baixo), a velocidade para a parede do tubo é maior que no centro do tubo. Se o fluxo do fluido livre ou forçado tem direções opostas (no caso do fluido



frio deslocar-se para baixo e o fluido aquecido deslocar-se para cima), a velocidade diminui para a parede do tubo e aumenta no centro.

Em um tubo horizontal, o fluxo livre causa circulação transversal no fluido. As partículas do fluido que move em circulação transversal de move também simultaneamente na direção longitudinal. O resultado destes movimentos é uma linha helicoidal. Em tubos horizontais, o modelo de circulação do fluido é o mesmo no caso de aquecimento e resfriamento, e defere apenas na direção de fluxo.

Entretanto, a teoria e a experiência mostram que no caso de fluxo forçado a velocidade de transferência de calor varia ao longo do tubo. O coeficiente de transferência de calor é máximo para o fluxo que entra; ele cessa rapidamente para certo valor limite, que permanece constante (figura abaixo).

GRÁFICO

Tal mudança no coeficiente de transferência de calor leva-nos ao conceito de “estabilização térmica”. O coeficiente médio transferência de calor modifica-se ao longo do tubo da forma similar. Apenas neste caso a seção de estabilização é de maior tamanho.

A estabilização térmica é própria para a condutividade térmica relativamente baixa do fluido e constante para todo o campo de temperatura. Ela é própria (ou devido) a baixa condutividade térmica porque a temperatura cessa primeira na camada limite terminando na parede.

É obvio que o tamanho da seção de estabilização térmica depende de:

- Condutividade térmica do fluxo envolvido
- Diante do tubo
- Posição do tubo (vertical ou horizontal)
- Da presença e direção da convecção natural, e
- Da eficiência da estabilização hidrodinâmica.

De acordo com dados experimentais e para um coeficiente de transferência de calor (médio) ao longo do comprimento do tubo, o tamanho da seção de estabilização térmica é $l_{st} = 50d$.

Desta forma, em fluxo de fluido não-isotérmico, o fenômeno adquire muitas particularidade.

Multas das considerações discutidas acima são relativas a fluxos naturais não-isotérmicas, ao efeito da convecção livre na transferência de calor etc. não podem ser bem expressas em termos precisos em relações qualitativas. Não obstante, estas considerações podem ser empregadas com bastante sucesso para avaliação qualitativa do fenômeno, elas mostram-nos os aspectos do processo que merecem atenção e permite uma avaliação correta dos resultados de testes.



1.15 Transferência de Calor em Fluxo Turbulento

Em fluxo turbulento, a temperatura de calor é causada dentro do fluido, principalmente pela mistura ou turbulência. O processo de mistura ou turbulência é de tal intensidade que a temperatura do fluido permanece praticamente constante sobre a seção transversal do centro.

A grande variação de temperatura é observada somente dentro da camada limite. Essa distribuição de temperatura faz o fluxo livre (convecção natural) impossível; a transferência de calor é totalmente explicada por fatores de fluxo forçado (convecção forçada).

Nusselt foi o primeiro a montar e conduzir uma investigação correta e detalhada sobre transferência de calor em fluxos turbulentos de gases. Foi também a utilizar a teoria de similaridade para tratamento dos dados teste e obter uma relação geral.

A análise e a generalização dos dados de teste para tubos retos e lisos; estabeleceu a seguinte relação.

$$Nu_f = 0,021 \cdot Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \quad (1.15.1)$$

Aqui a temperatura de referência é a temperatura média do fluido T_f e a dimensão de referência é o diâmetro equivalente de d_q que é igual ao quádruplo da área da seção transversal do conduto, dividido pelo perímetro total (perímetro molhado), independente da fração do perímetro participante no processo de troca de calor. Para tubos redondos, o diâmetro equivalente é igual ao geométrico.

A fórmula (1.15.1) é aplicável para condutor de qualquer forma – redonda, esférico, quadrado, retangular, triangular, anelar ($\frac{d_2}{d_1} \sim 1 - 5,6$) etc., e para todos líquidos elásticos ou não, para $Re_f \sim 10^4 - 5 \times 10^6$ e $Pr_f \sim 0,6 - 2500$.

Desta fórmula concluímos na transferência de calor em condições turbulentas, esta depende da velocidade do fluxo ou, mais precisamente no modo do fluxo que determina o número de Reynolds, Re_f . Entretanto, a transferência de calor depende numa maior extensão, das propriedades físicas do fluxo envolvido caracterizando pelo número de Prandtl Pr_f . Por último, a transferência de calor depende essencialmente de que o fluido esteja aquecido ou frio, isto é, da direção do fluxo.

No caso de aquecido, isto é, quando o fluxo de calor for dirigido da parede para o fluido, a intensidade da transferência de calor será maior do que quando o fluxo de calor estiver em direção oposta, isto é, quando o caso for de resfriamento.



Além disso, a transferência de calor depende para certa extensão, da diferença de temperatura e, conseqüentemente do carregamento térmico da superfície aquecida. Com a ascensão da diferença de temperatura a razão de transferência de calor aumenta no caso de aquecimento e diminui no caso de resfriamento. Tem sido comprovado por investigações especiais que a dependência da transferência de calor para a diferença de temperatura e direção do fluxo de calor é determinada pela diferença no campo de temperatura, no campo da viscosidade e na espessura da camada limite nos processos de aquecimento e resfriamento, e que esta dependência

é suficientemente bem definida pela potencia 0,25 da razão $\frac{Pr_f}{Pr_w}$.

O fato é que é preciso conhecer a temperatura da parede T_w para achar a razão $\frac{Pr_f}{Pr_w}$ não apresenta serias dificuldades, porque essa razão é representada apenas na potencia 0,25 e varia de 0,5 a 2,0 para a água, por exemplo. Neste caso, uma avaliação aproximada para T_w é admissível. A diferença de temperatura e a direção do fluxo de calor exercem efeitos diferentes para diferentes temperaturas do fluido porque para a maioria dos fluidos $Pr = f(T)$ não é linear.

Para os gases, $Pr \approx$ constante e $\frac{Pr_f}{Pr_w} \approx 1$, assim a fórmula pode ser simplificada, e para o ar ($Pr \approx 0,70$), ela adquire a seguinte forma:

$$Nu_f = 0,018 \cdot Re_f^{0,8} \quad (1.15.2)$$

Esta fórmula descreve bem os resultados obtidos na investigação do aquecimento e resfriamento de ar, fluindo tanto a baixa como a alta velocidade. Com este método de tratamento e generalização de dados experimentais, a transferência de calor não depende nem da temperatura do gás nem da direção do fluido de calor.

A fórmula (1.15.1) pode ser usada para calcular a transferência de calor ao longo de tubos, com $\frac{l}{d} \geq 50$; no caso de pequenos tubos onde a razão $\frac{l}{d} \leq 50$, a velocidade da transferência de calor é um tanto maior.

Neste caso o coeficiente de transferência de calor calculado pela fórmula (1.15.1) acima citada precisa ser multiplicado por um fator de correção E_e dado na tabela a seguir: $Re_f \perp e/d$:



		Relação e/d								
Re do fluido	$Re_f \perp e/d$	1,00	2,00	5,00	10,00	15,00	20,00	30,00	40,00	50,00
	10000	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1,00
	20000	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1,00
	50000	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1,00
	100000	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1,00
	1000000	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1,00

Por último mostraremos ser acentuado o efeito centrífugo que inevitavelmente aparece nos fluxos de fluidos nos tubos curvos.

A influência do efeito centrífugo diminui com o aumento do raio de curvatura R e desaparece inteiramente quando $R = \infty$ (tubo reto).

O efeito centrífugo pressiona o fluido contra a parede oposta do tubo, aparecendo a chamada “circulação secundária” na seção transversal.

Devido ao encerramento de velocidade e circulação secundária é, conseqüentemente, turbulência mais intensiva, o coeficiente de transferência de calor em tubos curvos é maior que em tubos retos.

A transferência de calor em tubos curvos é calculada por fórmulas derivadas das de tubos reto, introduzindo um fator de correção ER que, para serpentinas pode ser achado pela expressão abaixo:

$$ER = 1 + 1,77 \frac{d}{R} \quad (1.15.3)$$

onde R = raio de serpentina em metros e d = diâmetro do tubo, em metros.

Nas serpentinas, o efeito centrífugo causa a intensificação da transferência de calor ao longo de todo o tubo. Nas curvas e tubos curvos o efeito centrífugo é local, mas sua influencia é estendida adiante.

1.16 Escoamentos Bifásicos

1.16.1 Sistema Bifásico Estacionário

Quando um sistema bifásico é estacionário, pode-se definir:

1. **Qualidade** – definido como a relação entre a massa de gás e a massa total da mistura bifásica:

$$x = \frac{M_g}{M} \quad (1.16.1)$$



2. **Fração de Vazio** – definida como uma relação entre o volume de vapor na mistura e o volume total da mistura líquido-vapor:

$$f_v = \frac{x \cdot v_g}{v_f + x \cdot v_{fg}} \quad (1.16.2)$$

onde v_f e v_g são respectivamente os volumes específicos do fluido e do gás. Por exemplo, a água a pressão atmosférica, em geral tem qualidade $x = 2\%$, isto informa que:

$$\begin{aligned} v_f &= 1,043 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{kg} \\ v_g &= 1,673 \text{ m}^3 / \text{kg} \\ \Rightarrow f_v &= \frac{0,02 \times 1,673}{1,043 \times 10^{-3} + 0,02(1,673 - 1,043 \times 10^{-3})} = 0,9704 \\ f_v &= 97,04\% \end{aligned} \quad (1.16.3)$$

Esse resultado demonstra que quando $x \rightarrow 0 \Rightarrow f_v \rightarrow 1$.

Uma outra definição importante é aquela que se denomina **razão de deslizamento** S , que é a razão entre os volumes do gás e o volume do fluido:

$$\begin{aligned} S &= \frac{V_g}{V_f} \\ \therefore V_g &= \frac{v_g \cdot x \cdot \dot{m}_t}{A_g} \\ V_f &= \frac{v_f \cdot (1-x) \cdot \dot{m}_t}{A_f} \end{aligned} \quad (1.16.4)$$

1.16.2 Sistema Bifásico em Escoamento

As mesmas definições que foram feitas quando o sistema é estacionário, também são feitas quando o sistema está sob um campo de velocidades, isto é, está em movimento:

Qualidade – agora é definida como a razão, numa seção, entre o fluxo mássico de gás e o fluxo mássico total da mistura:

$$x = \frac{\dot{m}_g}{\dot{m}_t} \quad (1.16.5)$$



Fração de vazio, f_v é definida agora como a razão entre as seções transversais do gás e da mistura, isto é,

$$f_v = \frac{A_g}{A_g + A_f} \quad (1.16.6)$$

Dessa forma, a **Razão de Deslizamento**, S , pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S = \frac{V_g}{V_f} = \frac{x}{1-x} \frac{A_f}{A_g} \frac{v_g}{v_f}$$

mas $f_v = \frac{A_g}{A_g + A_f} \Rightarrow \frac{A_f}{A_g} = \frac{1-f_v}{f_v}$

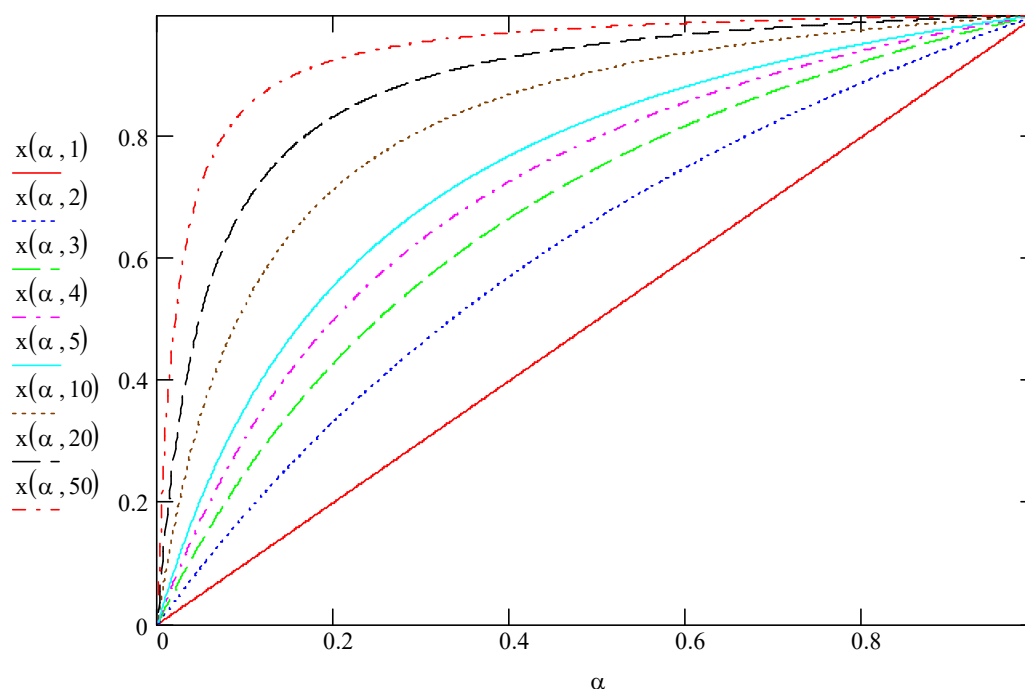
$$\Rightarrow S = \left(\frac{x}{1-x} \right) \left(\frac{1-f_v}{f_v} \right) \left(\frac{v_g}{v_f} \right) \quad (1.16.7)$$

Agora tirando os valores da qualidade e da fração de vazios em função da razão de deslizamento, se tem:

$$\left. \begin{aligned} f_v &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{x} \right) \psi} \\ x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-f_v}{f_v} \right) \frac{1}{\psi}} \end{aligned} \right\} \therefore \psi = \frac{v_f}{v_g} S \quad (1.16.8)$$

Utilizando-se da ferramenta computacional Mathcad, foi feito o gráfico:

$$x(f_v, \psi) := \frac{1}{1 + \left(\frac{1-f_v}{f_v} \right) \cdot \frac{1}{\psi}}$$



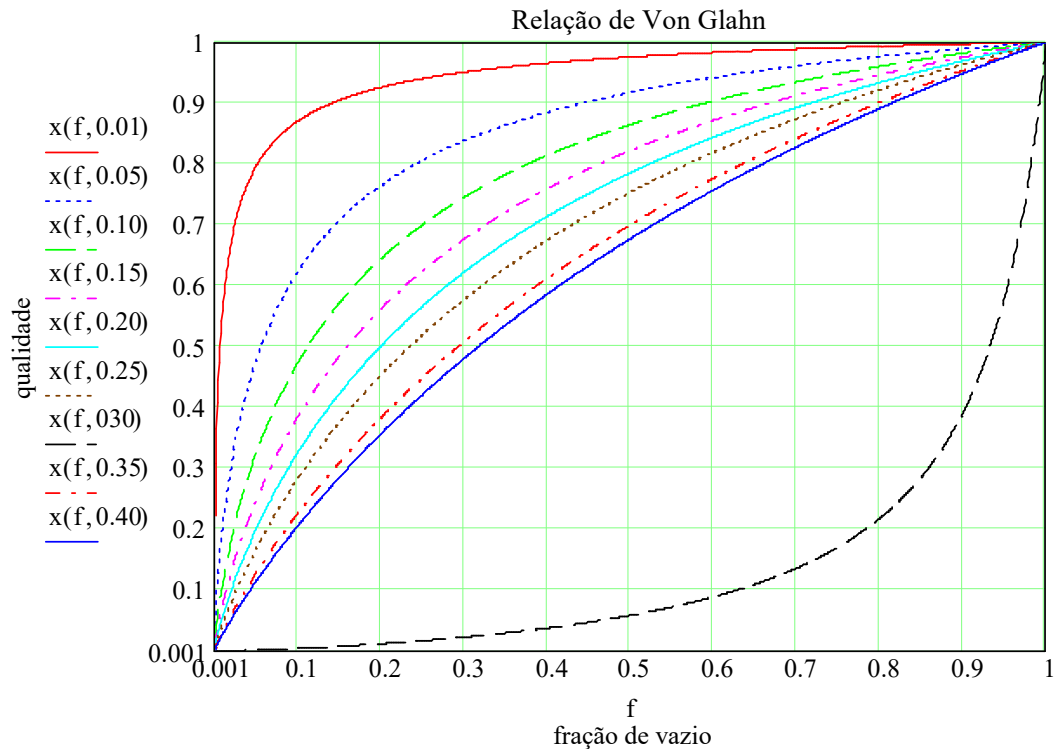
Onde a função ψ toma valores 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, e 50 como um parâmetro. Isso

mostra que quando ψ é constante então se x cresce, f_v também cresce; também se x for constante então se S cresce, f_v decresce.

Von Glahn propôs a seguinte relação empírica entre x e f_v :

$$\frac{1}{x} = 1 - \left(\frac{v_g}{v_f} \right)^{0,67} \left(1 - \left(\frac{1}{f_v} \right)^{\left(\frac{v_g}{v_f} \right)^{0,1}} \right) \quad (1.16.9)$$

Baseado em dados experimentais disponíveis para a água e cobrindo um grande intervalo de validade para condições de operação e geometria de canal. Usando o Mathcad se traçou o gráfico abaixo, onde a relação entre os volumes específicos do gás e do fluido serve de parâmetro, pela fórmula de Von Glahn



A importância de se obter valores precisos de S , razão de deslizamento pode ser enfatizada pelo seguinte fato: o primeiro passo no procedimento de cálculo de um canal com uma mistura bifásica é achar o valor máximo de f_v , fator de vazios, na saída do canal. É usual, em projetos, tomar S constante ao longo do canal, que por sua vez pode introduzir erros no resultado final, o que deve ser corrigido.

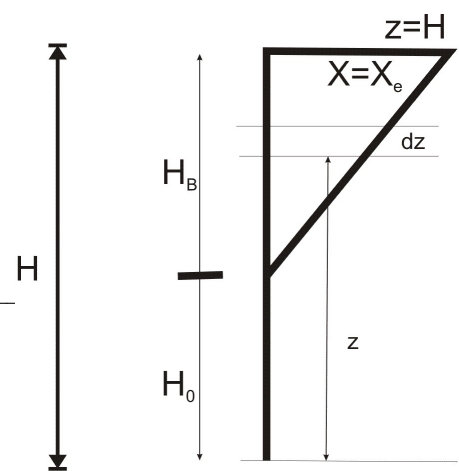
1.16.3 Alturas de Ebulição e Não-Ebulição

Um fluido em ebulição em um sistema de escoamento, tal como um refrigerante escoando através de um núcleo de um reator nuclear, encontra diversas resistências ao escoamento, manifestando-se através de saltos de pressão.

Duas das maiores resistências, são:

- Salto de pressão devido à fricção;
- Salto de pressão causado pela aceleração do refrigerante que aumenta de volume ao receber calor do canal.

Outros saltos de pressão são devidos à obstrução do escoamento por corpos submergidos e a mudanças bruscas nas áreas de escoamento.





A altura de não-ebulição H_0 é aquela na qual apenas o calor sensível é adicionado ao refrigerante sub-resfriado.

Em $z = H_0$ o refrigerante torna-se saturado. Assim, alguma ebulição sub-resfriada pode ocorrer em H_0 , mas sua influência é muito pequena sobre os saltos de pressão ou densidade. As razões H_0/H e H_B/H podem ser avaliadas em razão do calor sensível adicionado no canal.

A relação entre os calores sensível adicionado por unidade de massa do refrigerante e o calor total adicionado à mesma massa $\frac{q_s}{q_t}$ é relacionada com a razão H_0/H de acordo com o modo de adição de calor no canal:

$$\frac{q_s}{q_t} = \frac{h_f - h_i}{(h_f + xh_{fg}) - h_i} \quad (1.16.10)$$

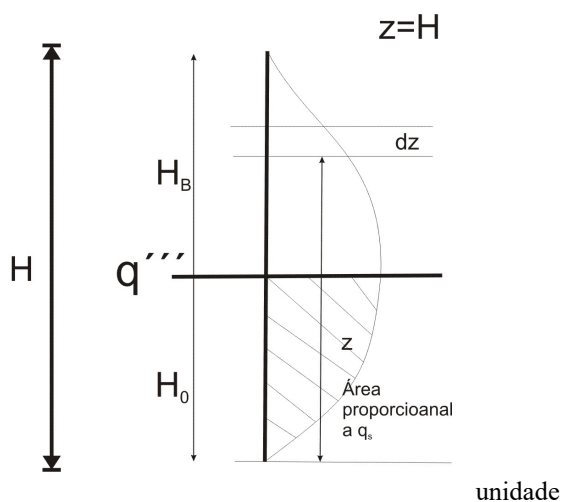
onde h_i é a entalpia do líquido saturado na entrada do canal, em J/kg, e h_{fg} é a entalpia de evaporação da mistura bifásica. No caso de adição uniforme, se tem:

$$\frac{q_s}{q_t} = \frac{H_0}{H}$$

$$e$$

$$\frac{H_B}{H} = 1 - \frac{H_0}{H}$$

No caso de adição senoidal de calor com comprimento de extrapolação negligenciado, a área sob q''' ou q' (calor por



de comprimento do canal) é proporcional a q_t . A área entre $z = 0$ e $z = H_B$ é equivalente a q_s . Assim

$$\frac{q_s}{q_t} = \frac{\int_0^{H_B} q_e' \sim \sin \frac{\pi z}{H} dz}{\int_0^H q_e' \sim \sin \frac{\pi z}{H} dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi H_0}{H} \right) \quad (1.16.12)$$

Onde q_e' é a adição de calor por unidade de comprimento do canal, a partir do centro do canal, $z = H/2$.



1.16.4 Salto de Pressão em um Canal com Escoamento Bifásico

A perda por atrito em um canal de altura H , $(\Delta p_f)_H$, é composta por atrito devido a uma só fase (líquido) em H_0 , $(\Delta p_{sp})_{H_0}$ e o fluxo bifásico (“two phase”) em H_B , $(\Delta p_{tp})_{H_B}$:

$$(\Delta p_f)_H = (\Delta p_{sp})_{H_0} + (\Delta p_{tp})_{H_B} \quad (1.16.13)$$

1.16.5 Fricção no Escoamento Monofásico

A fricção no escoamento monofásico (“single phase”) é dada pela fórmula de Darcy-Weisbach⁷:

$$(\Delta p_{sp})_{H_0} = f_0 \frac{H_0}{D_e} \frac{\bar{\rho}_0 \bar{V}_0^2}{2g} \quad (1.16.14)$$

onde o fator de atrito, que é uma tensão de cisalhamento adimensional na parede do canal, é dado por:

$$f_0 = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8} \bar{\rho}_0 \bar{V}_0^2} \quad (1.16.15)$$

$\bar{\rho}_0$ é a densidade média do líquido em H_0 tomada como a média entre a massa específica do início do canal e a massa específica no final do canal em H_0 , isto é,

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_f) \quad (1.16.16)$$

\bar{V}_0 é a velocidade média do líquido em H_0 calculada pela seguinte relação:

$$\bar{V}_0 = \frac{1}{2} V_i \left(1 + \frac{v_f}{v_i} \right) \quad (1.16.17)$$

v_i , v_f são os volumes específicos do líquido saturado no início e final do canal; o número de Reynolds \bar{Re}_0 é dado por:

⁷ Devido a Henri P. G. Darcy (1803-1858) e Julius Weisbach (1806-1871).



$$\text{Re}_0 = \frac{D_e \bar{V}_0 \bar{\rho}_0}{\bar{\mu}_0} = \frac{D_e V_i \rho_i}{\bar{\mu}_0} \quad (1.16.18)$$

a viscosidade média do líquido, $\bar{\mu}_0$, em H_0 é dada como a media entre as viscosidade na entrada (inicio) do canal e na sua saída (final), isto é,

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(\mu_i + \mu_f) \quad (1.16.19)$$

1.16.6 Fricção no escoamento Bifásico

Para uma mesma altura e taxa de fluxo mássico, se tem:

$$\Delta p_{tp} > \Delta p_{sp} \quad (1.16.20)$$

Essa diferença aparece como uma função do tipo de fluxo e resulta no aumento da velocidade do escoamento; portanto ele é experimentalmente determinado medindo a queda total de pressão no sistema bifásico e subtraindo as quedas calculadas devido ao monofásico em H_0 , a aceleração, a contração na entrada e na saída e as perdas por expansão.

O salto de fricção bifásico em H_B , $(\Delta p_{tp})_{H_B}$, é usualmente avaliado calculando o saldo de pressão monofásico em H_B assumindo que apenas líquido saturado com mesma taxa total de fluxo mássico existe no canal. Assim,

$$(\Delta p_{sp})_{H_B} = f_B \frac{H_B}{D_e} \frac{\rho_f V_f^2}{2g} \quad (1.16.21)$$

O número de Reynolds em H_B (monofásico – líquido) é dado por:

$$\frac{D_e \rho_f V_f}{\mu_f} = \frac{D_e \rho_i V_i}{\mu_f} \quad (1.16.22)$$

Tomando um fator multiplicador de fricção bifásico, \bar{R} , maior que 1 e correlacionado com os parâmetros de operação, definido por:

$$\bar{R} = \frac{(\Delta p_{tp})_{H_B}}{(\Delta p_{sp})_{H_B}} > 1 \quad (1.16.23)$$

Se tem,



$$(\Delta p_f)_H = \left(f_0 \frac{H_0 \bar{\rho}_0 \bar{V}_0^2}{D_e 2g} \right) + \bar{R} \left(f_B \frac{H_B \rho_f V_f^2}{D_e 2g} \right) \quad (1.16.24)$$

Se o grau de sub-resfriamento não é muito grande, a equação (1.16.24) acima pode ser reescrita, com um pequeno erro, da seguinte forma:

$$(\Delta p_f)_H = \left(f_B \frac{H_B \rho_f V_f^2}{D_e 2g} \right) (H_0 + \bar{R} H_B) \quad (1.16.25)$$

Pode ser mostrado empiricamente, que \bar{R} é função da qualidade, da pressão, mas independe da taxa de escoamento mássico.

Exemplo: Seja um reator a água fervendo de 1,8288 m de altura tem um canal de diâmetro equivalente a 0,044196 m e combustível encamisado correspondendo a um tubo reto e liso. Ele recebe calor senoidalmente e opera a pressão de 6,895 Mpa, qualidade na saída igual a 8%, velocidade de entrada de 0,9144 m/s e temperatura de entrada da água a 522°F que é igual a 272,22 °C. Calcule a perda de carga do canal. Assumir que o multiplicador de fricção aplicável ao aquecimento é senoidal.

Solução:

Com a temperatura $T_i = 522^\circ F = 272,22^\circ C$ procura-se esse valor na tabela 8, porém ele não existe, logo há necessidade uma interpolação entre os valores imediatamente anterior e posterior; assim, se encontra:

$$\begin{aligned} 271,11^\circ C &\rightarrow h_i = 1190,194 [kJ/kg] \\ 276,67^\circ C &\rightarrow h_i = 1218,571 [kJ/kg] \end{aligned}$$

Interpolando linearmente, se acha $h_i = 1196,494 [kJ/kg]$.

Com a pressão igual a $1000 \text{ psia} = 6,895 \text{ MPa}$, entra-se na tabela 7 e encontram-se as entalpias:

$$\begin{aligned} h_f &= 2.776,476 [kJ/kg] \\ h_{fg} &= 1.511,875 [kJ/kg] \end{aligned}$$

Mas a relação entre os calores sensíveis é:

$$\frac{q_s}{q_t} = \frac{h_f - h_i}{(h_f + x_e h_{fg}) - h_i} = \frac{1261,601 - 1196,494}{(1261,601 + 0,08 \times 1511,875) - 1196,494} = 0,349930$$

Mas o fluxo senoidal é definido por:



$$\frac{q_s}{q_t} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{H_0}{H} \pi \right) \right)$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{H_0}{H} \pi \right) = 1 - 2 \frac{q_s}{q_t} \Rightarrow \frac{H_0}{H} = \frac{\cos^{-1} \left(1 - 2 \frac{q_s}{q_t} \right)}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{H_0}{H} = \frac{\cos^{-1}(0,30014)}{\pi} = \frac{1,265957}{3,141593} = 0,402966$$

Mas o valor de $H = 1,8288m$ logo se tem:

$$H_0 = 0,402966 \times H = 0,402966 \times 1,8288 = 0,7369 [\text{m}]$$

$$\Rightarrow H_B = H - H_0 = 1,8288 - 0,7369 = 1,0919 [\text{m}]$$

Agora é preciso avaliar o fator de fricção ou de perda de carga f_0 para o número de Reynolds correspondente ao fluxo médio em H_0 do fluxo de líquido saturado. Como se sabe, o produto ρV é constante ao longo do canal; com isso pode-se avaliar a massa específica do líquido saturado na entrada do canal; para isso procura-se, na tabela 7, o volume específico do líquido saturado para a pressão de $p=6.895 \text{ MPa}$ ($\sim 1000 \text{ psi}$); assim se acha:

$$p=6.895 \text{ MPa} \rightarrow v_f = 0,001348 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$$

$$\Rightarrow \rho_f = \frac{1}{v_f} = 741,8398 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Sabe-se também que a viscosidade varia muito pouco dentro do intervalo de temperatura de interesse, se tem:

$$\text{Re} = \frac{D_e V_{f_0} \rho_f}{\frac{1}{2}(\mu_i + \mu_f)} = \frac{0,0442 \times 0,3048 \times 741,8398}{(0,0001016929)} = 98278,082 \quad (1.16.26)$$

A viscosidade inicial e final são praticamente a mesma, e pode-se achá-la na tabela 9 (Propriedades físicas da água líquida) entrando com a temperatura $T=272.22^\circ\text{C}$ e com a pressão $p = 6.895 \text{ Mpa}$:
 $\mu_i \approx \mu_f \approx 0.0001016929 [\text{kg} / \text{m.s}]$.

Como valor de $\text{Re} = 98272$, e a relação $\frac{\varepsilon}{D} = 0,000005$, chamada de rugosidade relativa, referente a tubo liso e reto (“Drawn tubing”), entra-se no gráfico de Moody e encontra-se:

$$f \cong 0,186 \quad (1.16.27)$$

Assim, o salto de pressão na fase simples é:



$$\begin{aligned} (\Delta p_{sp})_{H_0} &= f \frac{H_0}{D_e} \frac{\rho_0 V_0^2}{2g} = 0,186 \times \frac{0,7369}{0,0442} \frac{741,84 \times 0,3048^2}{2 \times 9,81} \\ (\Delta p_{sp})_{H_0} &= 10,893 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (1.16.28)$$



2 Convecção



3 Radiação



ANEXOS

CÁLCULO ECONÔMICO DE ISOLANTE DE TUBULAÇÃO

PROGRAMA: Cálculo de espessura econômico de isolante em tubulações.

Linguagem: Matlab 6 (release 12)

Problema: Dada uma tubulação qualquer, onde é feito o transporte de um fluido, o programa calcula a espessura econômica de um determinado isolante.

DADOS:

Dados da Tubulação

3. comprimento em metros;
4. diâmetro em metros (interno);
5. diâmetro externo em metro;
6. condutividade térmica em kcal/m.h.°C;
7. número de Prandtl para a temperatura do fluido interno menos 10°C;

Dados do fluido interno

1. temperatura média do fluido em °C
2. condutividade térmica em kcal/m.h.°C
3. viscosidade dinâmica em m²/s
4. número de Prandtl
5. velocidade média do fluido em m/s

Dados do isolante

1. peso específico em kg/m³
2. espessura comercial em metros
3. custo por kg (R\$/kg)



-
4. condutividade térmica em kcal/m.h.°C

Dados do meio ambiente (que envolve a tubulação)

1. temperatura em °C
2. condutividade térmica para a temperatura média entre a temperatura média do fluido interno à tubulação e a temperatura do meio ambiente.
3. viscosidade dinâmica em m²/s para a mesma temperatura da condutividade térmica
4. - número de Prandtl - idem

Dados de calor

1. poder calorífico do combustível usado em kcal/kg
2. rendimento do equipamento (caldeira por exemplo)
3. custo: custo necessário para a queima de um kg de combustível (incluir o custo do combustível propriamente dito mais os custos de mão de obra, energia, uso de equipamento e instalação, etc)

OBS: A entrada de dados deve ser feita rigorosamente na ordem fornecida acima.

IMPRESSÃO OU SAÍDA DE DADOS:

DADOS (ver ordem e interpretação acima)

.....

número de Reynolds

fator de correção diâmetro / comprimento

número de Nusselt

coeficiente de película (interno)

.....

coeficiente externo de película

coeficiente global de película

quantidade de calor transferido para o meio ambiente pela tubulação e acessórios, considerando a não existência de vazamentos.

Perda em R\$ / hora de utilização de instalação, devido ao desperdício de vapor e calor.

Custo do isolante para n camadas, considerando tempo de uso cinco anos ou de 43800 horas



Custo diferencial – se positivo representa o custo das perdas de calor durante o uso de uma hora da instalação, isto é, precisa de mais isolante para fazer este custo tender a zero; se negativo representa o custo adicional por hora de utilização da instalação, pela colocação das n camadas de isolante, isto é, na instalação não há mais custo por perda de calor mas há por excesso de isolante.

Número de camadas n

OBS: OS CUSTOS REFERIDOS ACIMA SÃO REFERENTES A UMA HORA DE UTILIZAÇÃO DA INSTALAÇÃO, OU SEJA UMA HORA DE FUNCIONAMENTO DA INDÚSTRIA.

ALGORITIMOS UTILIZADO

01 - dados da tubulação

02 - dados do fluido interno

03 - dados do isolante

04 - dados do meio ambiente

05 - dados da fonte de calor

06 - cálculo do número de Reynolds Re_f

07 - Se Re_f menor que 2200 fazer $z = 0$, se não $z = 1$

08 - Se a relação l/d (comprimento / diâmetro) é maior que 50, fazer $fc = 1$, se não fazer

$$fc = 1 + \frac{\left(51 - \frac{l}{d}\right)^{0,3025}}{1,8031 - \left(\frac{l}{d}\right)^{0,8808}}$$

09 - Se $z = 0$ ir ao passo 10 e se $z = 1$ ir ao passo 11

10 - Fazer (cálculo do número de Nusselt)

$$Nu_f = fc \cdot 0,17 \cdot Re_f^{0,33} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25}$$

vá ao passo 12



11 - fazer (cálculo do número de Nusselt)

$$Nu_f = 0,016538 \cdot fc \cdot Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \quad \text{Vá ao passo 12}$$

12 - Fazer N = 0 (número de camadas de isolantes)

13 - calcular o coeficiente interno de película $\alpha = Nu_f \left(\frac{k_{f1}}{d_i} \right)$

14 - Cálculo do número de Grashoff $Gr_f = \frac{g(d_e + 2n\delta)^3 \cdot (T_{f1} - T_{f2})}{\nu_{f2}^2 \left(273 + \frac{T_{f1} + T_{f2}}{2} \right)}$

15 - Cálculo do número de Nusselt para o meio ambiente

$$Nu_{f2} = 0,47 \times Gr_f^{0,25}$$

16 - Cálculo do coeficiente externo de película $\alpha_e = Nu_{f2} \cdot \left(\frac{k_{f2}}{d_e + 2n\delta} \right)$

17 - Cálculo do coeficiente global de película:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{1}{2k_w} \ln \left(\frac{d_e}{d_i} \right) + \frac{1}{2k_{isol}} \sum \ln \left(\frac{d_e + 2n\delta}{d_e + 2(n-1)\delta} \right) + \frac{1}{\alpha_e (d_e + 2n\delta)}}$$

18 - Cálculo da quantidade de calor transferido para o meio ambiente pela tubulação

$$Q = \alpha \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T$$

19. Cálculo do custo das perdas $C_{perdas} = \frac{Q \cdot C_g}{f \cdot PC}$ onde C_g é o custo de geração de calor por kg de combustível;

f é o rendimento do equipamento e PC é poder calorífero do combustível (exemplo, quando energia elétrica PC=860)

20 - Custo do isolante, considerando o seu uso por um tempo igual a 5 anos:

$$C_{isol} = \frac{\pi (d_e + 2n\delta) \cdot l \cdot \gamma \cdot (nd) C_i}{43800}$$



21. Verificação se é necessária mais uma camada de isolante. Se sim, faça $N=N+1$ vá para passo 14; caso contrário imprima os resultados e pare.



TABELAS de Símbolos e Conversões (Tiradas da publicação “NIST Special Publication 330 – 2001 Edition”).

Tabela 1 – Unidades Básicas SI

Table 1. SI base units

Base quantity	SI base unit
	Name
length	meter
mass	kilogram
time	second
electric current	ampere
thermodynamic temperature	kelvin
amount of substance	mole



Tabela 2 – Exemplos de Unidades Derivadas SI.

Table 2. Examples of SI derived units expressed in terms of base units

Derived quantity	Name	SI derived unit
area	square meter	
volume	cubic meter	
speed, velocity	meter per second	
acceleration	meter per second squared	
wave number	reciprocal meter	
density, mass density	kilogram per cubic meter	
specific volume	cubic meter per kilogram	
current density	ampere per square meter	
magnetic field strength	ampere per meter	
concentration (of amount of substance)	mole per cubic meter	
luminance	candela per square meter	



Tabela 3. Unidades Derivadas do SI com Nomes Especiais

Table 3. SI derived units with special names and symbols

Derived quantity	Name	Symbol	SI derived unit	
			Expressed in terms of other SI units	Expressed in terms of SI base units
plane angle	radian ^(a)	rad		$m \cdot m^{-1}$
solid angle	steradian ^(a)	sr ^(c)		$m^2 \cdot m^{-2}$
frequency	hertz	Hz		s^{-1}
force	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
pressure, stress	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
energy, work, quantity of heat	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
power, radiant flux	watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
electric charge, quantity of electricity	coulomb	C		$s \cdot A$
electric potential difference, [†] electromotive force	volt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
capacitance	farad	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-4} \cdot A^2$
electric resistance	ohm	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
electric conductance	siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^2$
magnetic flux	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
magnetic flux density	tesla	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1} \cdot m^{-2}$
inductance	henry	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Celsius temperature	degree Celsius ^(d)	$^{\circ}C$		K
luminous flux	lumen	lm	$cd \cdot sr^{(c)}$	$m^2 \cdot m^{-2} \cdot cd$
illuminance	lux	lx	lm/m^2	$m^2 \cdot m^{-2} \cdot cd$
activity (referred to a radionuclide)	becquerel	Bq		s^{-1}
absorbed dose, specific energy (imparted), kerma	gray	Gy	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
dose equivalent, ambient dose equivalent, directional dose equivalent, personal dose equivalent, organ equivalent dose	sievert	Sv	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
catalytic activity [‡]	katal	kat		$s^{-1} \cdot mol$



Tabela 4. Exemplos de Unidades SI derivadas e seus símbolos.

Table 4. Examples of SI derived units whose names and symbols include SI derived unit and symbols

Derived quantity	Name	Symbol	SI derived unit
			Express in terms SI base
dynamic viscosity	pascal second	Pa · s	$m^{-1} \cdot kg$
moment of force	newton meter	N · m	$m^2 \cdot kg$
surface tension	newton per meter	N/m	$kg \cdot s^{-2}$
angular velocity	radian per second	rad/s	$m \cdot m^{-1}$
angular acceleration	radian per second squared	rad/s ²	$m \cdot m^{-1}$
heat flux density, irradiance	watt per square meter	W/m ²	$kg \cdot s^{-3}$
heat capacity, entropy	joule per kelvin	J/K	$m^2 \cdot kg$
specific heat capacity, specific entropy	joule per kilogram kelvin	J/(kg · K)	$m^2 \cdot s^{-2}$
specific energy	joule per kilogram	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
thermal conductivity	watt per meter kelvin	W/(m · K)	$m \cdot kg \cdot$
energy density	joule per cubic meter	J/m ³	$m^{-1} \cdot kg$
electric field strength	volt per meter	V/m	$m \cdot kg \cdot$
electric charge density	coulomb per cubic meter	C/m ³	$m^{-3} \cdot s \cdot$
electric flux density	coulomb per square meter	C/m ²	$m^{-2} \cdot s \cdot$
permittivity	farad per meter	F/m	$m^{-3} \cdot kg$
permeability	henry per meter	H/m	$m \cdot kg \cdot$
molar energy	joule per mole	J/mol	$m^2 \cdot kg$
molar entropy, molar heat capacity	joule per mole kelvin	J/(mol · K)	$m^2 \cdot kg$
exposure (x and γ rays)	coulomb per kilogram	C/kg	$kg^{-1} \cdot s$
absorbed dose rate	gray per second	Gy/s	$m^2 \cdot s^{-3}$



Tabela 5. Prefixos do SI.

Table 5. SI prefixes

Factor	Name	Symbol	Factor	Name
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano
10^9	giga	G	10^{-12}	pico
10^6	mega	M	10^{-15}	femto
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto

wave number

entropy

specific heat capacity

thermal conductivity

radiant intensity

1 per meter

joule per kelvin

joule per kilogram kelvin

watt per meter kelvin

watt per steradian



Tabela 6 - Valores Experimentais da Condutividade Térmica a Pressão Atmosférica

Valores Experimentais da Condutividade Térmica a Pressão Atmosférica			
	Temperatura (°C)	$cal.s^{-1}cm^{-1}K^{-1}$	$W.m^{-1}K^{-1}$
Substancia			
Benzeno	22,5	0,000378	
	60,0	0,000363	
Tetracloroeto de Carbono	20,0	0,000247	
Éter	30,0	0,000328	
Álcool Etílico	20,0	0,000400	
Glicerina	20,0	0,000703	
Água	20,0	0,001430	
	60,0	0,001560	
	100,0	0,001600	
Metais			
Al	700,0	0,247000	
	790,0	0,290000	
Cd	355,0	0,106000	
	435,0	0,119000	
Pb	330,0	0,039000	
	500,0	0,037000	
Hg	700,0	0,036000	
	-	0,019600	
	120,0	0,026100	
	222,0	0,030300	
K	200,0	0,107300	
	400,0	0,095600	
Na	600,0	0,084600	
	100,0	0,205500	
	300,0	0,180900	
	500,0	0,159600	
Liga Na-K	100,0	0,061700	
56% Na	300,0	0,064800	
44% K	500,0	0,067500	



Substancias		
Alumínio	100,0	0,492000
	300,0	0,640000
	600,0	1,010000
Cádmio	-	0,220000
Cobre	100,0	0,216000
	18,0	0,918000
Aço	100,0	0,908000
	18,0	0,112000
Estanho, folha de flandres	100,0	0,107000
	-	0,152800
Tijolo vermelho	100,0	0,143000
		0,001500
Concreto		0,002200
Vidro	200,0	0,001700
Grafite		0,012000
Areia seca		0,000930
Madeira (pinheiro)		
	paralela ao eixo	0,000300
	perpendicular ao eixo	0,000090

Dados retirados de Reactor Handbook, vol2 AECD-3646 US Gov. Printing Office - 1955



Tabela 7 - Propriedades da Água e do Vapor Saturado Seco como Função da Pressão de Saturação

<i>Pressão</i> <i>kPa</i>	<i>Temperatura</i> <i>°C</i>	<i>Volume específico,</i>		<i>Entalpia, kJ/kg</i>		
		<i>liq.saturado</i>	<i>vapor sat.</i>	<i>liq.sat.</i>	<i>Evaporação</i>	<i>Vapor Sat.</i>
<i>p</i>	<i>T</i>	<i>v_f</i>	<i>v_g</i>	<i>h_f</i>	<i>h_{fg}</i>	<i>h_g</i>
101,33	180,55	0,001044	1,673228	419,022	2.257,113	2.676,018
689,50	296,42	0,001108	0,276832	694,555	2.068,245	2.762,777
1.379,00	350,42	0,001148	0,142911	827,112	1.962,413	2.789,525
2.068,50	385,99	0,001180	0,096398	916,661	1.883,563	2.800,225
2.758,00	413,26	0,001207	0,072548	986,673	1.817,041	2.803,946
3.447,50	435,69	0,001233	0,057957	1.045,520	1.757,961	2.803,481
4.137,00	454,89	0,001257	0,048087	1.097,156	1.703,534	2.800,690
4.826,50	471,79	0,001281	0,040944	1.143,210	1.652,595	2.795,805
5.516,00	486,92	0,001303	0,035531	1.185,542	1.603,983	2.789,525
6.205,50	500,68	0,001325	0,031273	1.224,851	1.557,231	2.781,850
6.895,00	513,31	0,001348	0,027839	1.261,601	1.511,875	2.773,476
7.584,50	525,01	0,001370	0,025005	1.296,491	1.467,682	2.763,940
8.274,00	535,93	0,001394	0,022620	1.329,752	1.424,186	2.753,705
8.963,50	546,16	0,001417	0,020584	1.361,618	1.381,156	2.742,773
9.653,00	555,81	0,001440	0,018830	1.392,320	1.338,591	2.730,911
10.342,50	564,95	0,001402	0,017288	1.422,325	1.296,026	2.718,351
11.032,00	573,62	0,001490	0,015933	1.451,400	1.253,460	2.704,860
11.721,50	581,88	0,001516	0,014728	1.479,777	1.210,895	2.690,905
12.411,00	589,77	0,001543	0,013629	1.507,921	1.167,865	2.675,786
13.100,50	597,32	0,001571	0,012643	1.535,367	1.124,370	2.659,737
13.790,00	604,56	0,001601	0,011744	1.562,813	1.080,176	2.642,990
14.479,50	611,51	0,001633	0,010920	1.590,027	1.035,053	2.624,847
15.169,00	618,20	0,001667	0,010158	1.617,241	988,534	2.605,774



15.858,50	624,65	0,001703	0,009446	1.644,455	940,619	2.585,073
16.548,00	630,87	0,001743	0,008784	1.671,901	890,843	2.562,744
17.237,50	636,87	0,001786	0,008154	1.700,045	838,509	2.538,554
20.685,00	664,08	0,002142	0,005247	1.866,584	495,430	2.362,014
22.088,82	674,00	0,003155	0,003155	2.099,180	0,000	2.099,180

Ajuste das curvas das entalpias, usando o Mathcad, e sua função expfit com os dados da tabela acima em função da pressão.

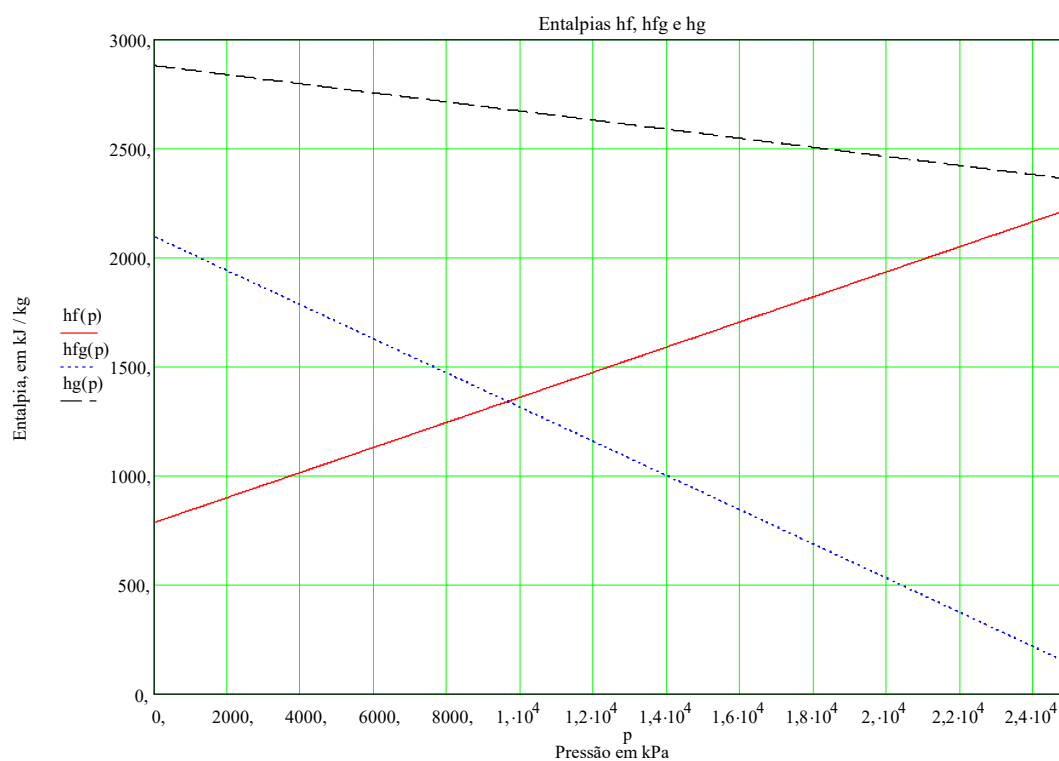




Tabela 8 – Propriedades da Água e do Vapor Saturado Seco como função da Temperatura de Saturação

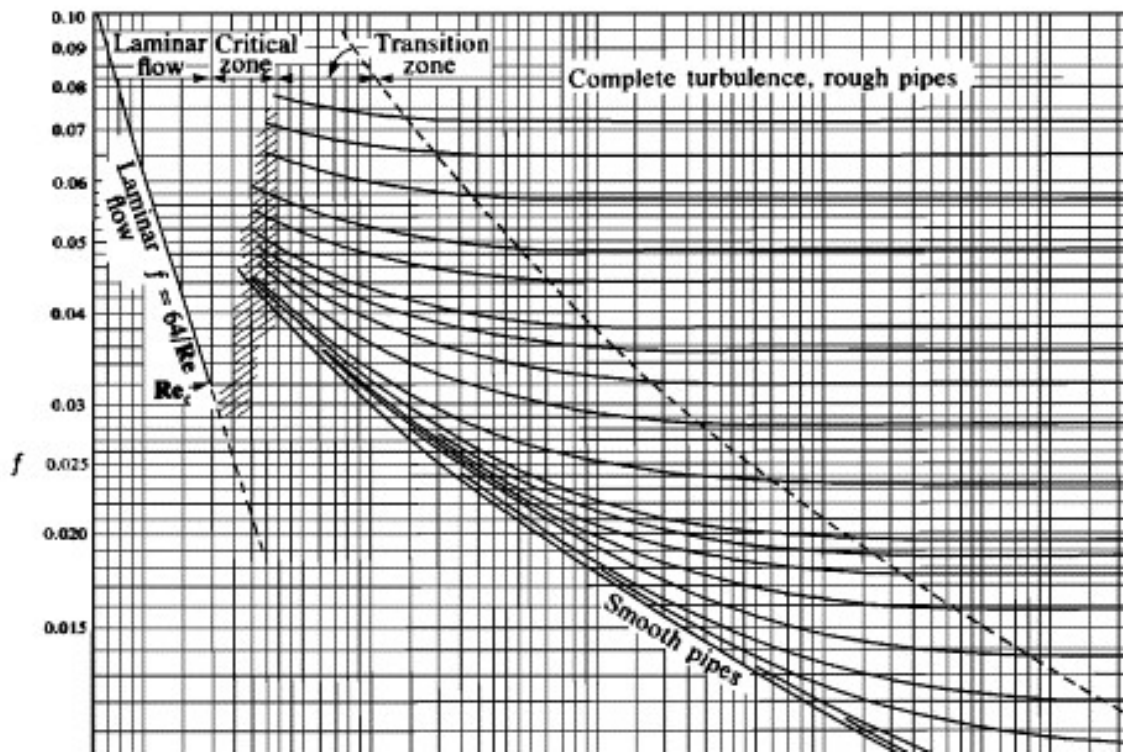
<i>temperatura</i> °C <i>T</i>	<i>pressão</i> kPa <i>p</i>	<i>Volume específico,</i>		<i>entalpia, kJ/kg</i>		
		<i>liq.saturado</i> <i>vf</i>	<i>vapor sat.</i> <i>vg</i>	<i>liq.sat.</i> <i>hf</i>	<i>Evaporação</i> <i>hfg</i>	<i>Vapor Sat.</i> <i>hg</i>
0,00	0,6113	0,001000	206,156614	0,000	2501,339	2501,339
176,67	927,5844	0,001123	0,208904	748,494	2026,610	2775,104
182,22	1054,3834	0,001131	0,184867	773,150	2007,072	2779,989
187,78	1194,4209	0,001138	0,164076	797,572	1986,836	2784,641
193,33	1348,6620	0,001146	0,146033	822,460	1966,368	2788,827
198,89	1518,2790	0,001155	0,130299	847,348	1944,969	2792,549
204,44	1703,7545	0,001164	0,116502	872,468	1923,105	2795,805
210,00	1906,4675	0,001173	0,104452	897,821	1900,775	2798,364
215,56	2127,1075	0,001182	0,093776	923,174	1877,516	2800,690
221,11	2367,0535	0,001192	0,084411	948,760	1853,558	2802,318
226,67	2628,3740	0,001202	0,076107	974,578	1828,903	2803,481
232,22	2910,3795	0,001213	0,068746	1000,629	1803,550	2804,179
237,78	3215,1385	0,001224	0,062190	1026,679	1777,267	2803,946
243,33	3544,7195	0,001236	0,056347	1053,195	1750,053	2803,248
248,89	3899,1225	0,001249	0,051115	1079,944	1721,909	2801,853
254,44	4279,7265	0,001262	0,046426	1106,925	1692,835	2799,759
260,00	4688,6000	0,001276	0,042212	1134,371	1662,597	2796,968
265,56	5126,4325	0,001291	0,038416	1162,050	1631,197	2793,247
271,11	5594,6030	0,001305	0,034994	1190,194	1598,401	2788,595
276,67	6095,1800	0,001322	0,031891	1218,571	2262,462	2783,245
282,22	6629,5425	0,001339	0,029082	1247,646	1529,319	2776,732
287,78	7198,3800	0,001358	0,026528	1277,185	1492,337	2769,289
293,33	7803,7610	0,001378	0,024206	1307,190	1453,726	2760,916
298,89	8447,0645	0,001399	0,022083	1337,893	1413,254	2751,147
304,44	9131,0485	0,001422	0,020135	1369,061	1370,689	2739,982
310,00	9856,4025	0,001448	0,018356	1401,392	1326,030	2727,190



315,56	10625,1950	0,001475	0,016699	1434,420	1278,581	2713,001
321,11	11440,1840	0,001505	0,015196	1468,379	1228,340	2696,719
326,67	12303,4380	0,001539	0,013792	1503,501	1174,610	2678,112
332,22	13217,0255	0,001576	0,012487	1540,019	1116,927	2657,178
337,78	14183,7045	0,001619	0,011269	1578,397	1054,591	2632,755
343,33	15203,4750	0,001669	0,010121	1618,636	985,975	2604,611
348,89	16285,9900	0,001728	0,009028	1661,667	909,683	2571,350
354,44	17437,4550	0,001799	0,007979	1708,186	823,158	2531,344
360,00	18650,9750	0,001893	0,006949	1760,520	720,583	2481,103
365,56	19940,3400	0,002028	0,005886	1823,088	590,562	2413,650
371,11	21305,5500	0,002289	0,004644	1913,568	389,599	2303,167
374,13	22091,5800	0,003155	0,003155	2099,180	0,000	2099,180



Gráfico de Moody



$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2 \log \left[\frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} f^{1/2}} \right]$$



REFERÊNCIAS

- Ozish, M. Necati. Basic in Heat Transfer – Boundary Value Problems of Heat Conduction. Dover.
Carlson & Jaeger. Conduction of Heat in Solids. Pergamon Press.
Schneider, P.J. Conduction Heat Transfer. Addison Wesley
Arpaci. Conduction Heat Transfer.
Myers, E. Glenn. Analytical Methods in Conduction Heat Transfer. McGraw Hill. 1971.
Ekert, E.R.G., Dreck, M.R. Analysis of Heat and Mass Transfer. International Student. 1972
Bird, R. Byron, Stewart, Warren E., Lightfoot, E.N. Transport Phenomena. John Wiley & Sons. 1960.
Isachenko, V.P., Osipova, V.A., Sukomel, A.S. Heat Transfer. Mir, 1977.
Abramovitz, M. and Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions. Dover. 1976.
Lamarsh, John R., Introduction to Nuclear Engineering. Addison-Wesley. 1977.
El-Wakil, M. M., Nuclear Power Engineering. McGraw-Hill. 1962.
Glasstone, Samuel, Sesonske, Alexander, Ingenieria de Reactores Nucleares. Ed. Reverté. 1975.
Lienhard, John H., A Heat Transfer Textbook. 3ª Ed., Prentice-Hall. 1987.
Tong, L. S., Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flow. New York. Wiley. 1965.
Patankar, Suhas V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York, McGraw Hill, 1980.